



Modelos diagnóstico-cognitivos na avaliação formativa em Matemática

Jorge Lira – CEnPE/UFC

26 de agosto de 2025

SEDUC-RS – Porto Alegre

O trabalho do professor é fazê-los trabalhar.

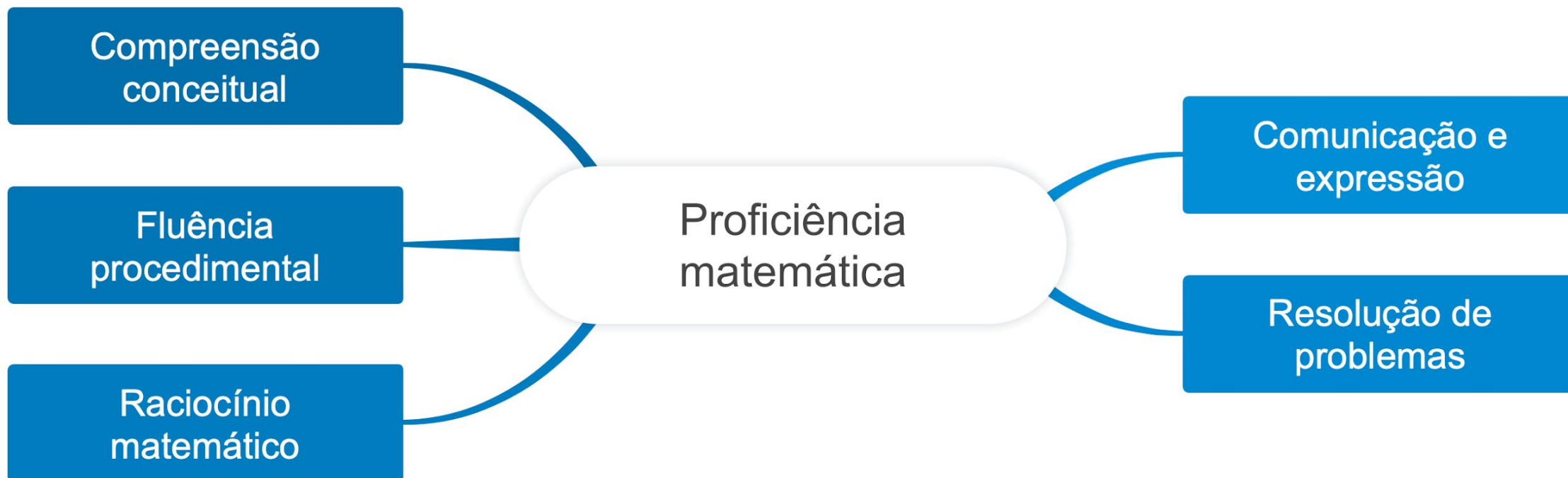
François Charmot

*Outras imagens ocorrem-me com facilidade, e em série
ordenada, à medida que as chamo.*

Santo Agostinho

Considerações sobre proficiência em Matemática

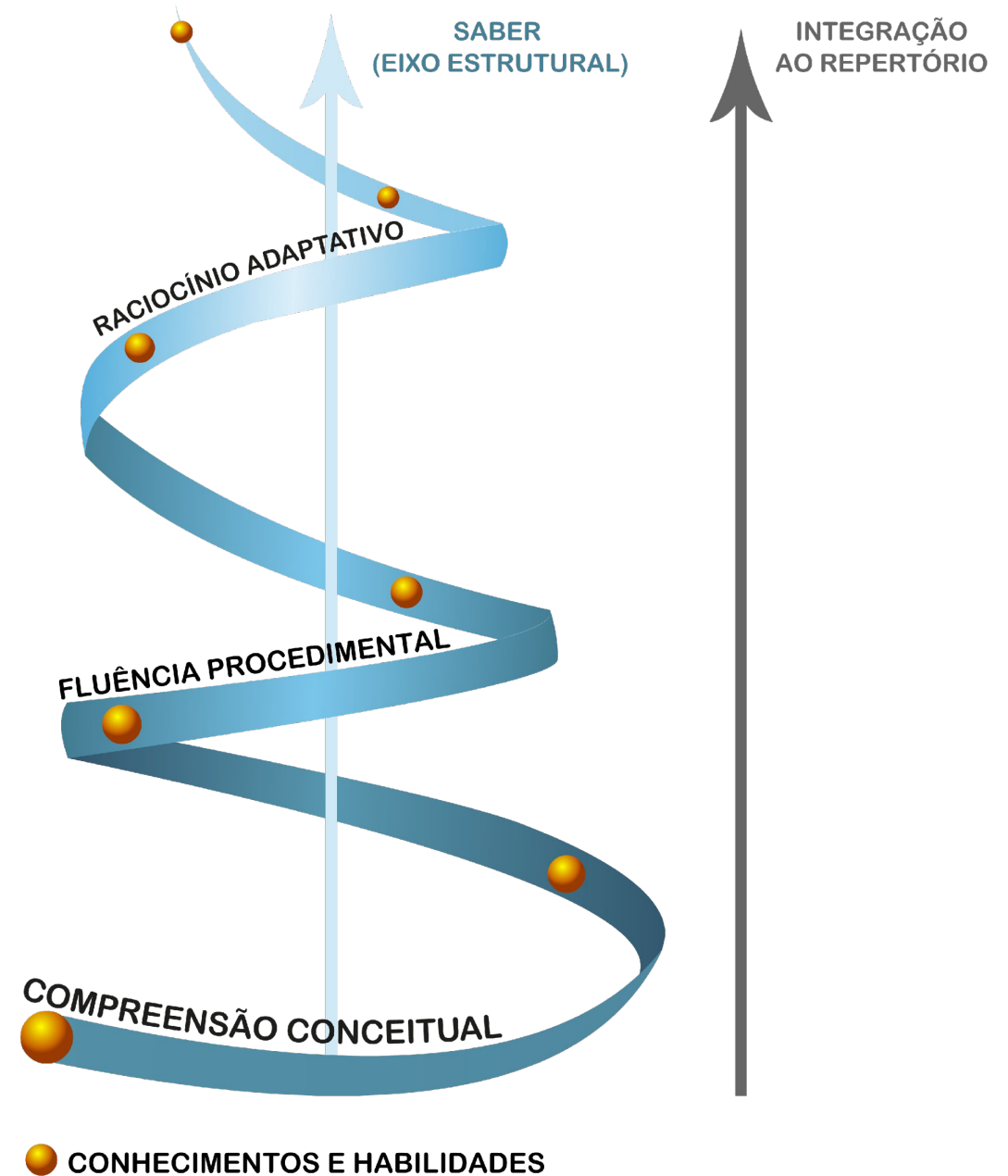
Aspectos da proficiência matemática



Fonte: *Adding it up*. National Council of Teachers in Mathematics

Aspectos da proficiência matemática

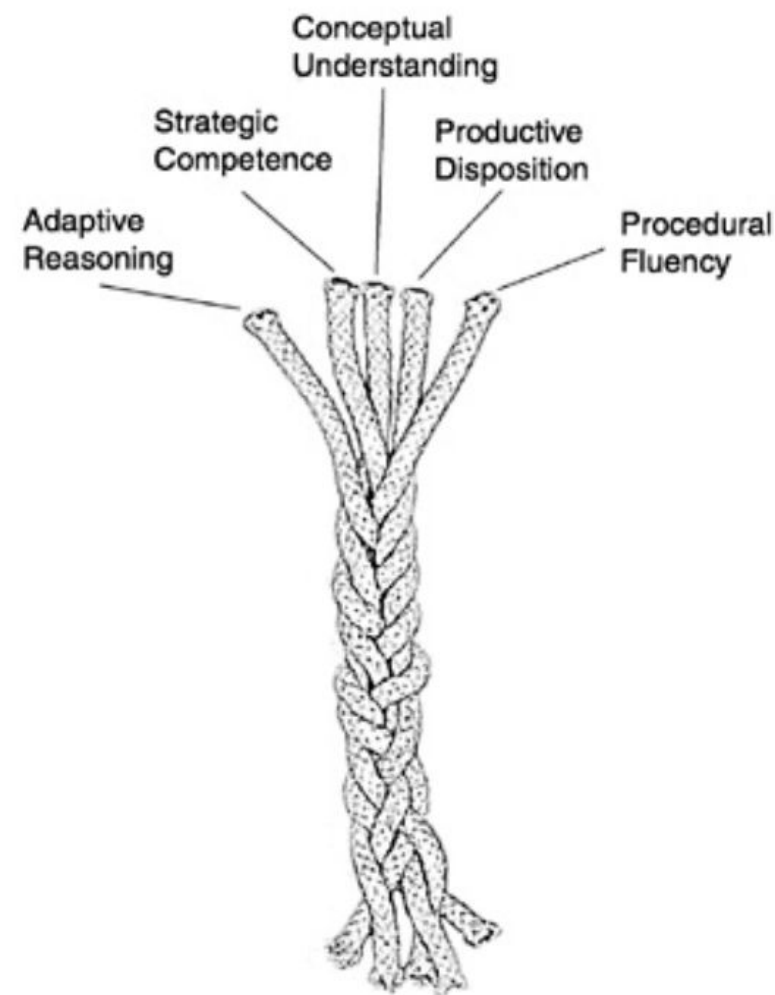
- Compreensão conceitual
- Fluência procedimental
- Competência estratégica
- Raciocínio matemático
 - Modelagem e aplicações
 - Conexões
 - Representação e comunicação



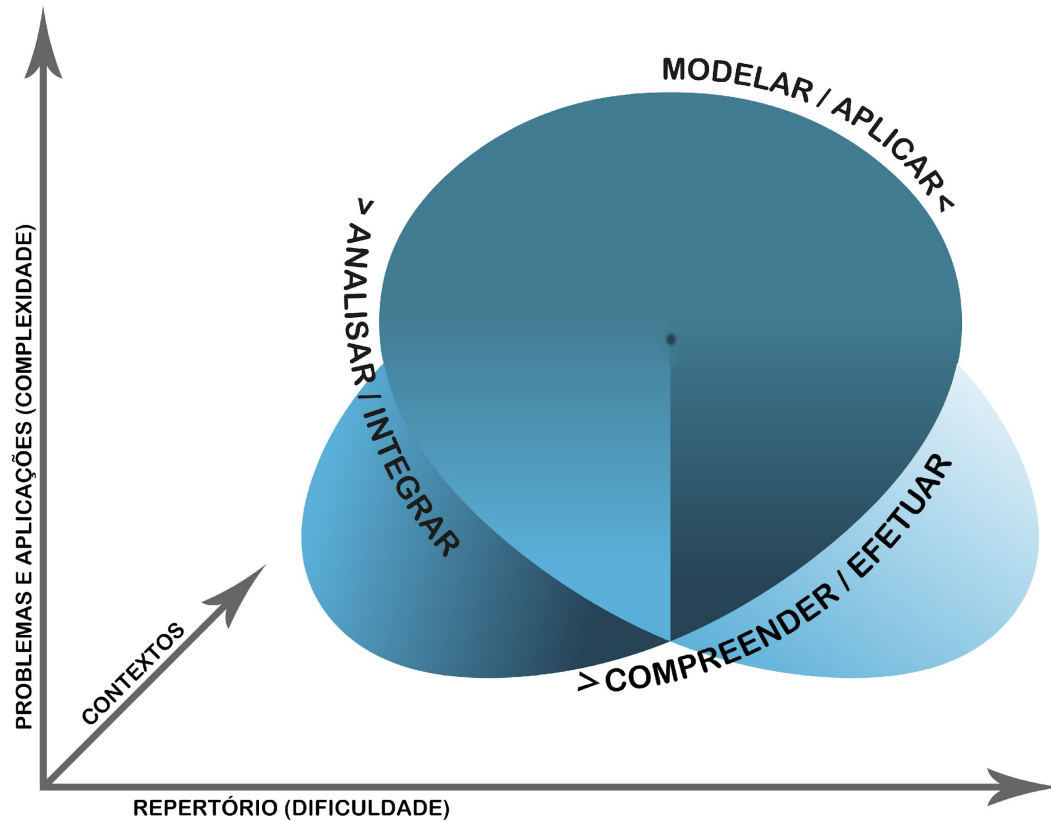
Definição de proficiência matemática

A *literacia matemática* é a capacidade de um indivíduo **raciocinar matematicamente e formular, empregar e interpretar** a matemática para **resolver problemas** numa **variedade de contextos** do mundo real. Inclui **conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas** para descrever, explicar e prever fenômenos. Ajuda os indivíduos a conhecer o papel que a matemática desempenha no mundo e a tomar decisões e julgamentos bem fundamentados necessários aos cidadãos construtivos, empenhados e reflexivos do século XXI.

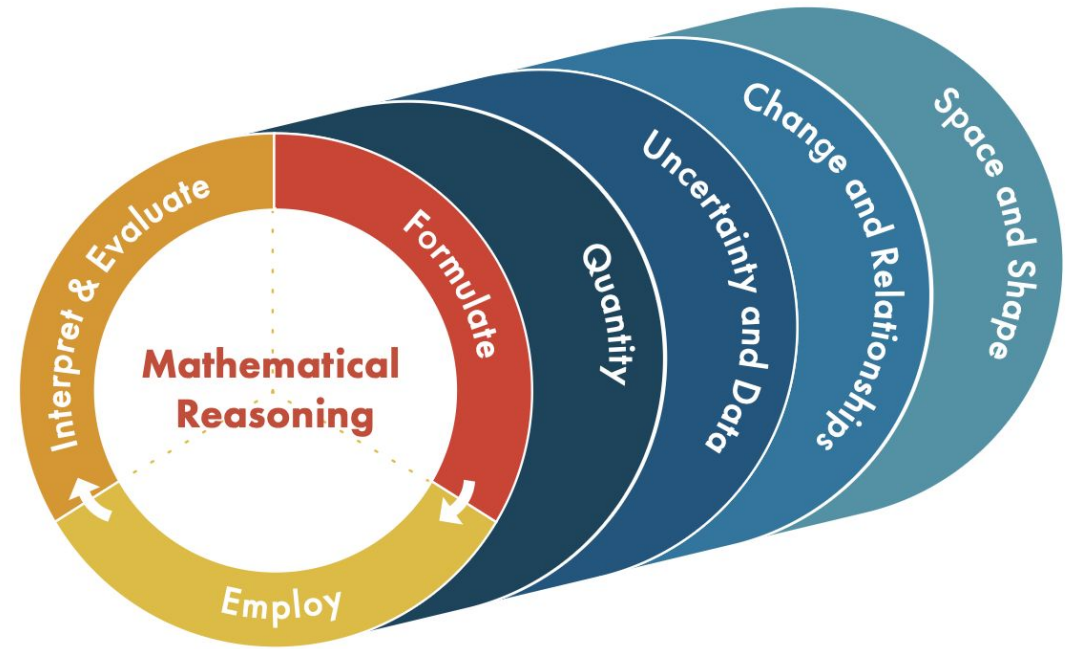
OECD. PISA 2021 Mathematics Framework (2021).



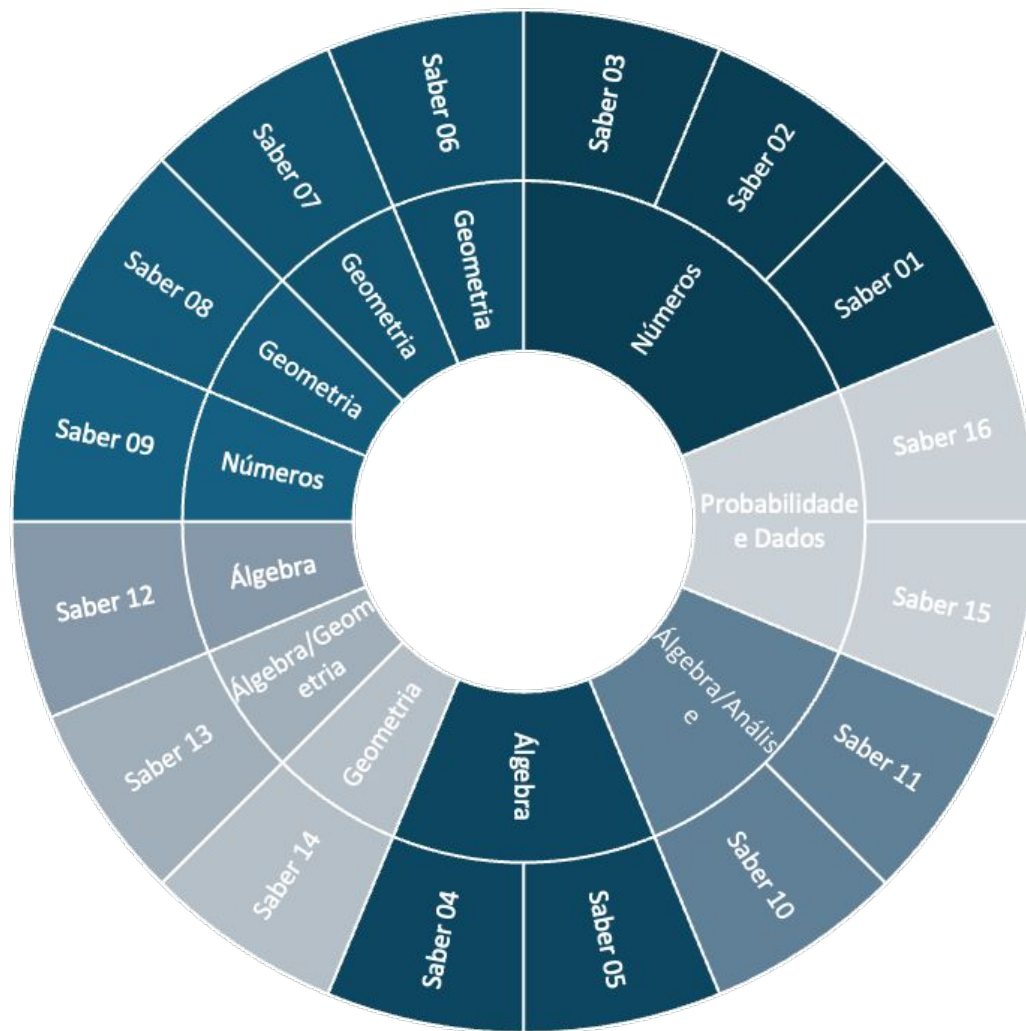
Dinâmica do raciocínio matemático



CEnPE/UFC



PISA



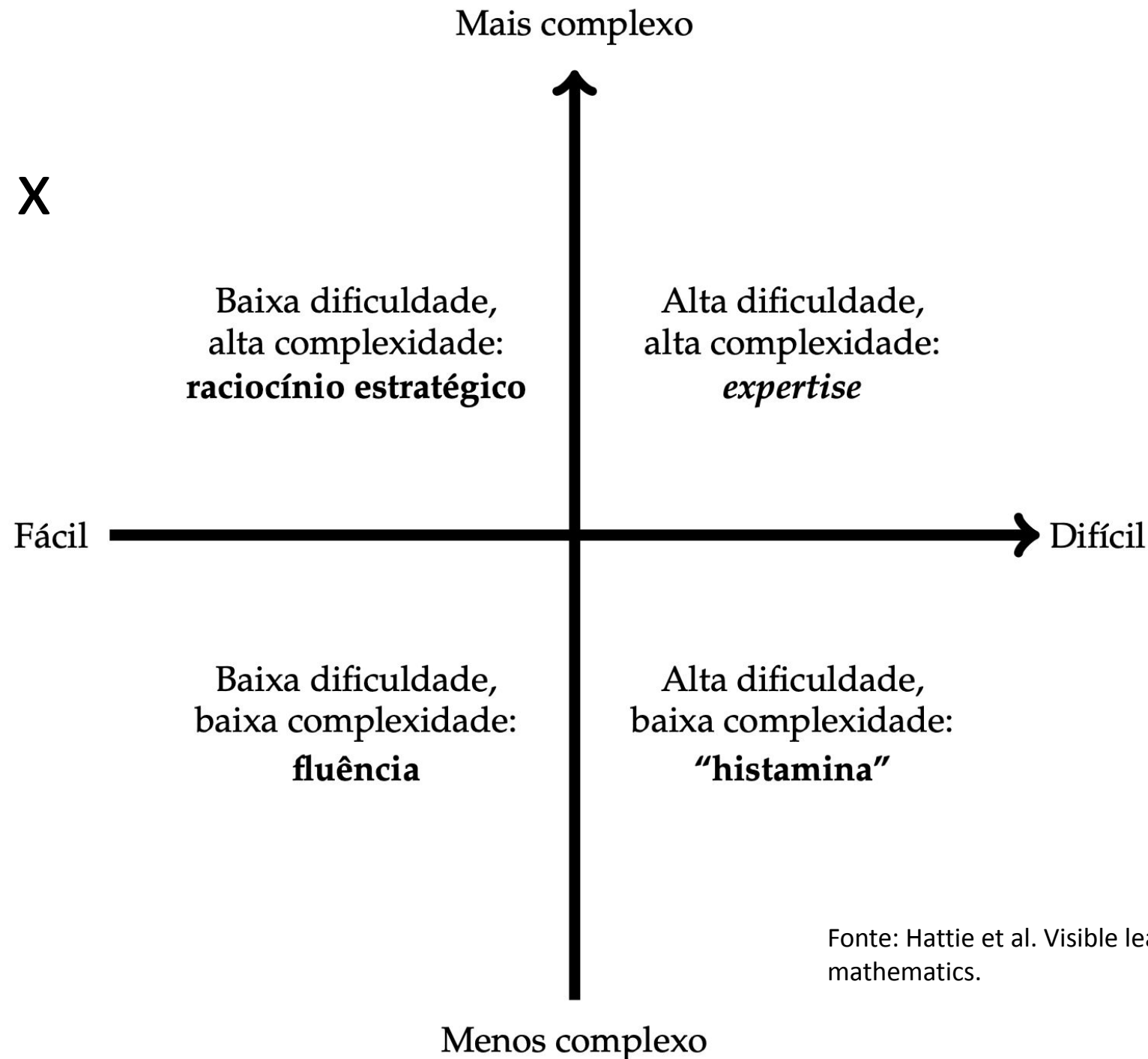
Matriz dos Saberes:
organização dos
domínios da
Matemática Básica

Ciclo de Polya na resolução de problemas



Fonte: Lira, J et al. Modelo de avaliação para a aprendizagem em Matemática. CEnPE/IU, 2023

Diagrama complexidade x dificuldade: taxonomias



Fonte: Hattie et al. Visible learning for mathematics.

Poincaré: intuição/dedução (geômetras & analistas)

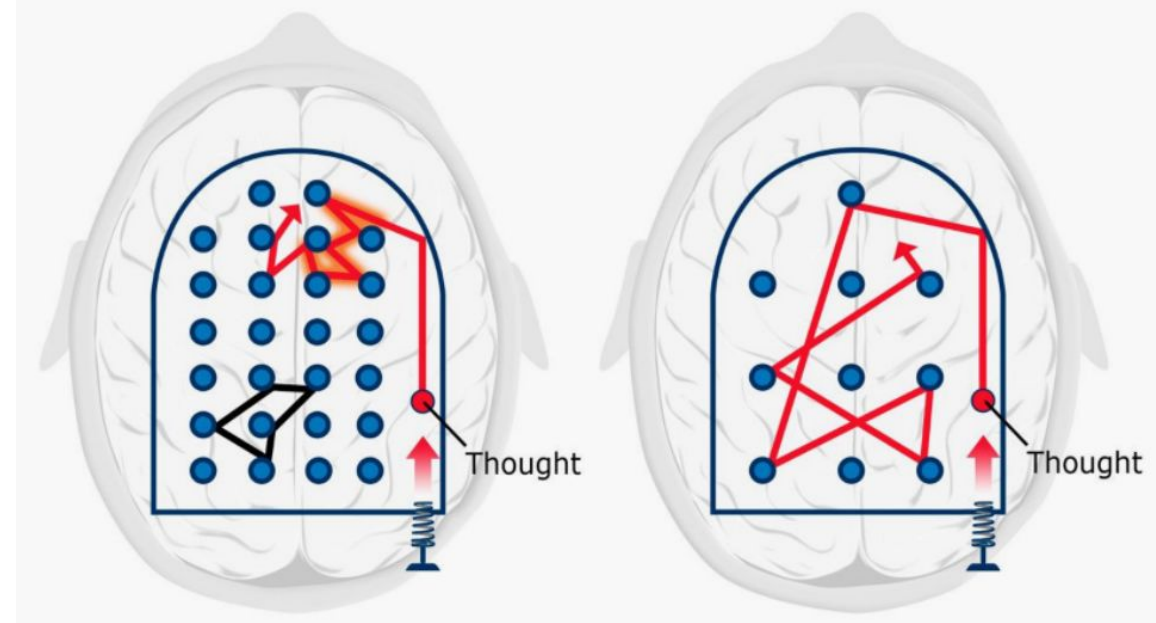


*“A análise pura põe à nossa disposição uma quantidade de **procedimentos** cuja infalibilidade ela nos garante; abre-nos mil caminhos diferentes, onde podemos nos embrenhar com toda confiança; garantem-nos que não encontraremos obstáculos neles; mas de todos esses caminhos, qual será aquele que nos levará mais prontamente ao fim? **Quem nos dirá qual deles é preciso escolher?** Necessitamos uma faculdade que nos faça ver o fim de longe, e essa faculdade é a intuição.”* (Poincaré. O valor da ciência, 1905).

Hadamard: psicologia da descoberta matemática

“Uma vez ultrapassada a primeira etapa, a preparação, depara-se nos uma barreira. O erro a evitar consiste em atacar frontalmente a barreira. É necessário proceder de forma indireta, ladear o assunto. (...) É necessário libertar o pensamento, de tal modo que o trabalho subconsciente se possa produzir.”

Alain Connes, em diálogo com
Jean-Pierre Changeux, 1989.

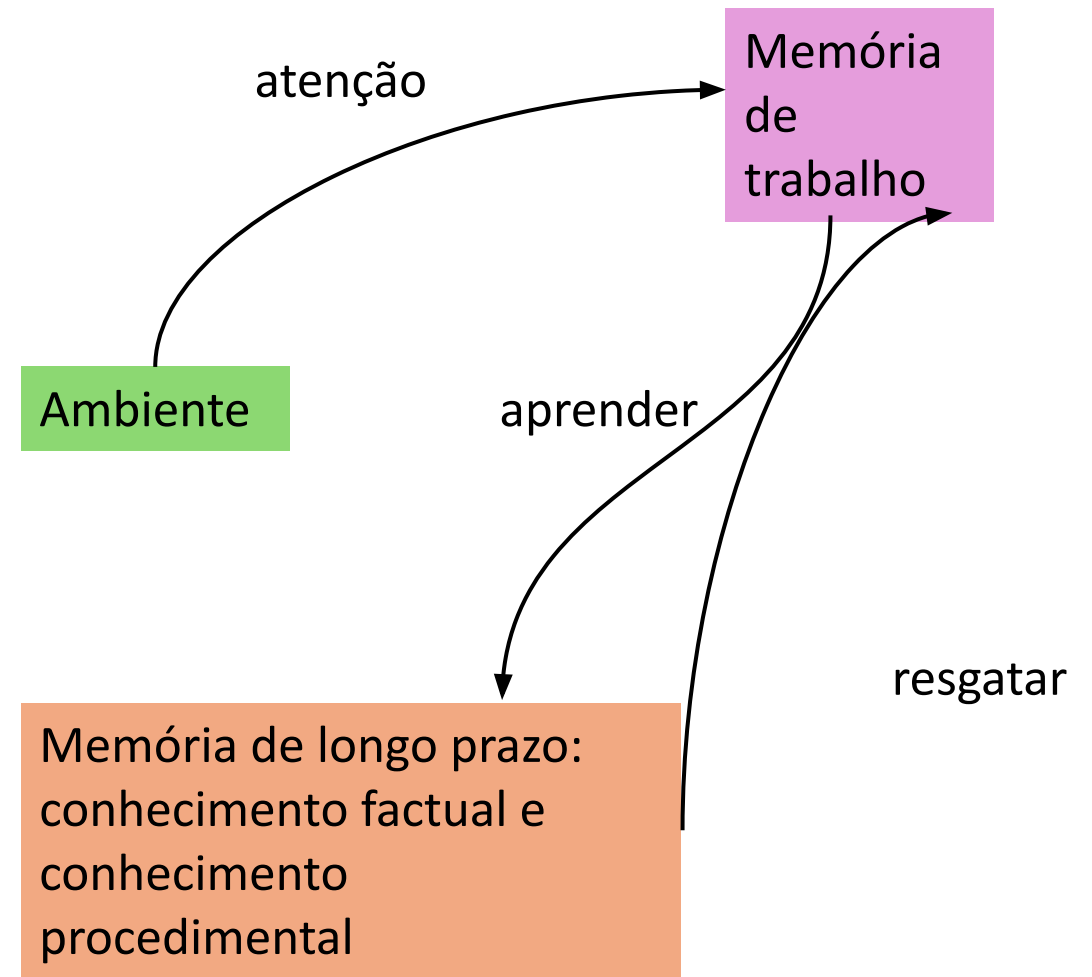


*The act of studying a question consists of **mobilizing ideas**, not just any ones, but those from which we might **reasonably expect** the desired solution. (...) The mobilized atoms undergo impacts which make them enter into **combinations** among themselves or with other atoms at rest. (...) In those indirect results lie the **possibilities of apparently spontaneous inspiration**.* Hadamard, 1945.

Repertório na base das competências complexas

O desenvolvimento de competências complexas (resolução de problemas, pensamento crítico e criativo, comunicação, colaboração) requer a aquisição de repertório e sua consolidação estruturada na memória de longo prazo.

Aprender é conectar novos conhecimentos e experiências a conhecimentos prévios, já organizados na memória de longo prazo.

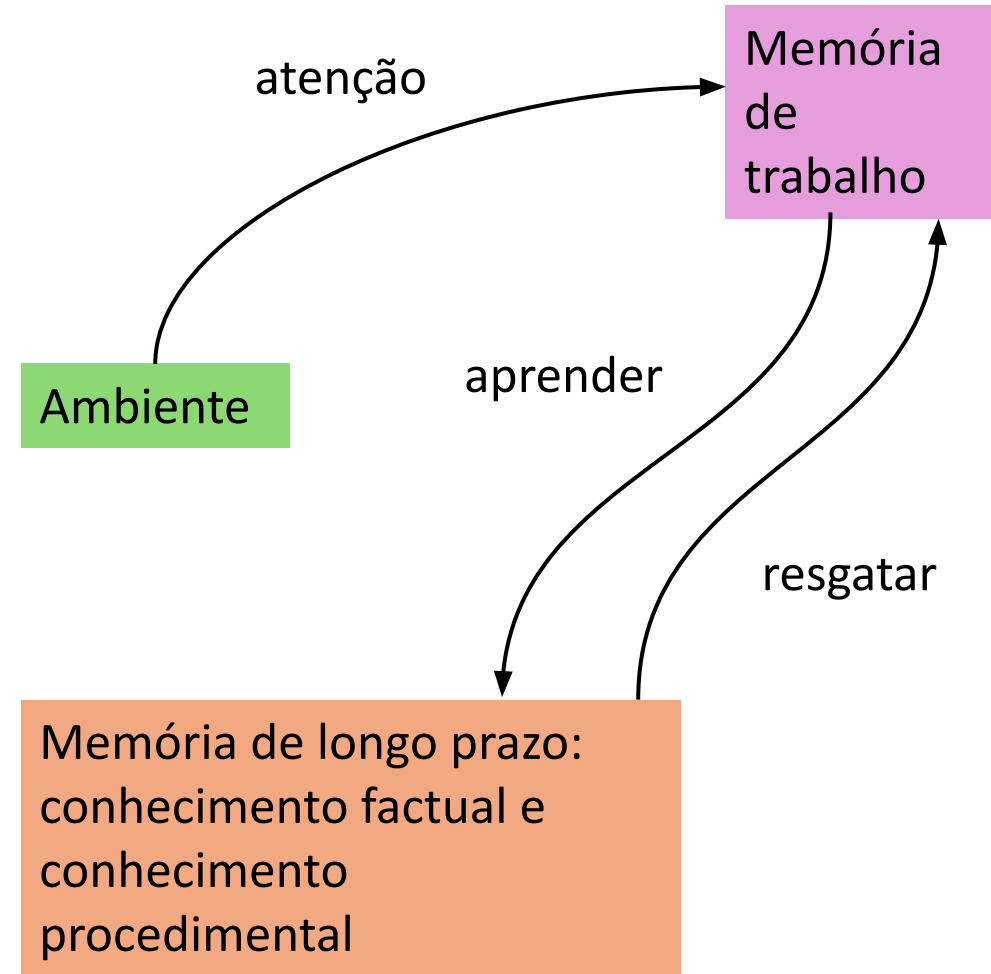


Conceitos e procedimentos, rápido & devagar

A compreensão conceitual depende da consolidação da **memória declarativa**.

A fluência procedimental, por sua vez, está associada à constituição da **memória procedimental**. Em um indivíduo proficiente, esses dois sistemas atuam de modo independente, mas integrado.

A instrução, ora centrada no professor, ora no aluno, deve promover o desenvolvimento dessas estruturas cognitivas.



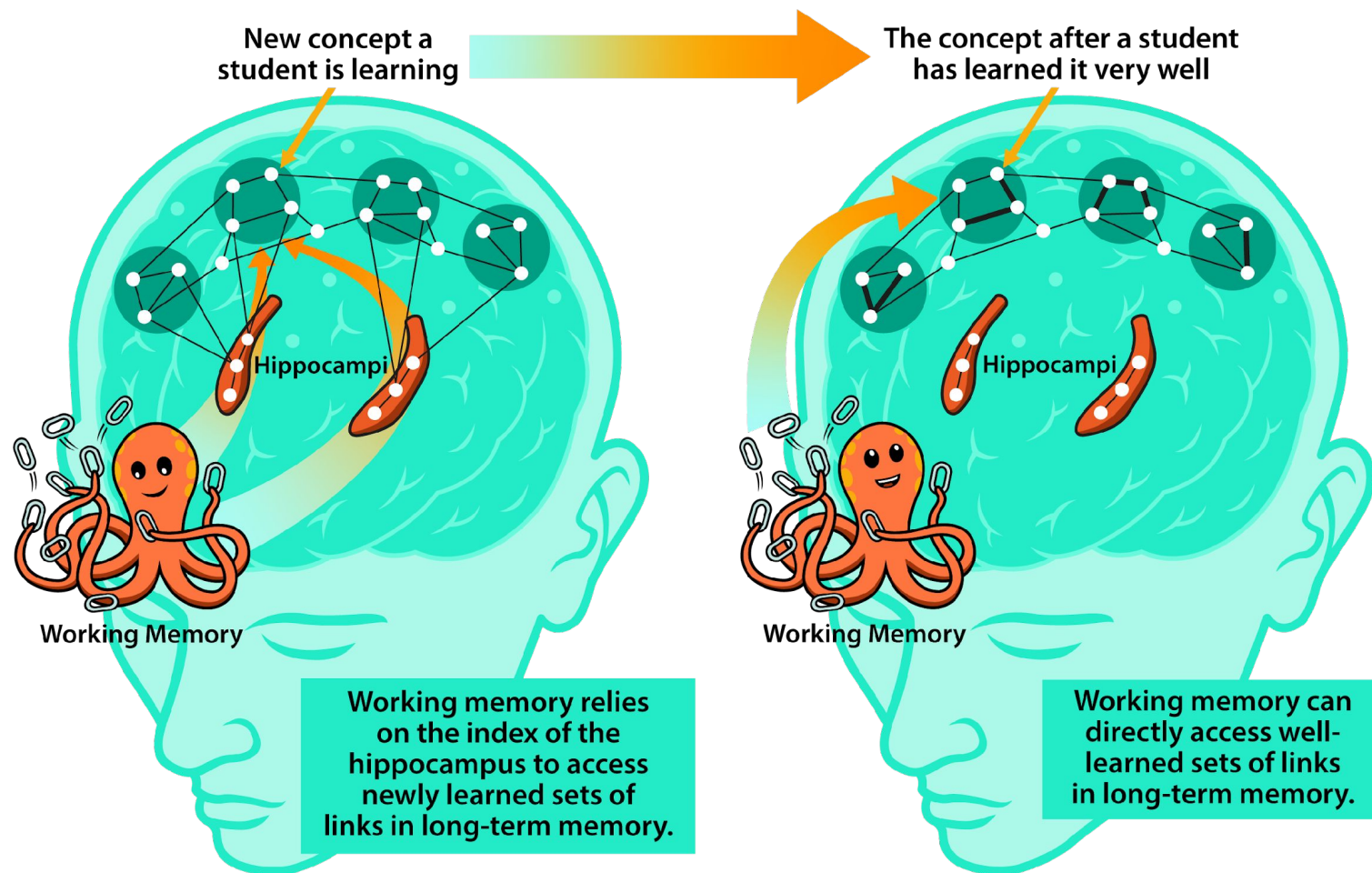
Memória, representações e ensino

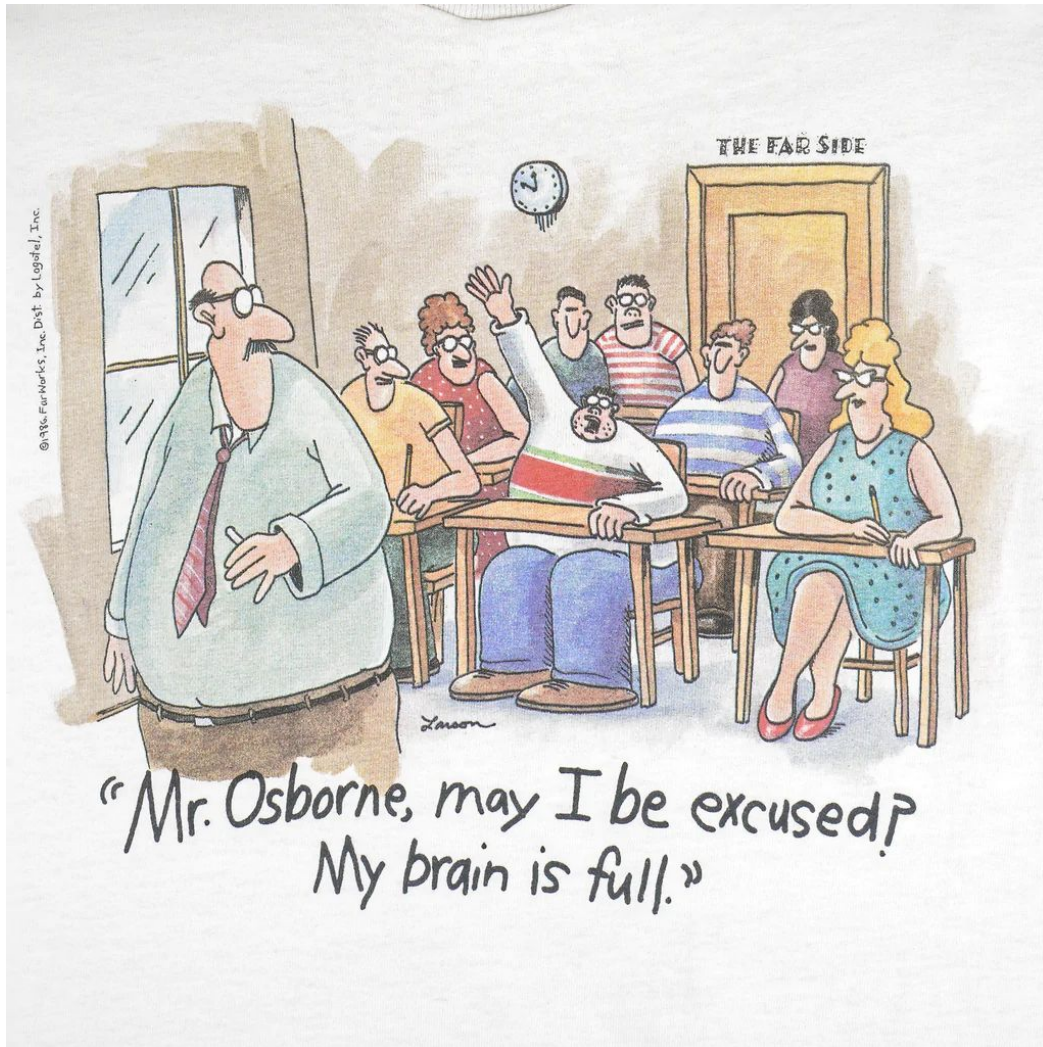
“Como os noviços ainda não desenvolveram os esquemas que permitem aos *experts* resolverem problemas complexos, eles precisam do **professor** (...) para obterem um substituto dos esquemas que lhes faltam.”

Uma vez atribuído sentido à decodificação das informações recebidas, “o aluno constrói para si mesmo uma **representação** da tarefa a efetuar. Daí, ele não trabalha mais no que lhe foi pedido, mas sim unicamente na representação da tarefa que ele construiu para si mesmo em função dos saberes que ele adquiriu anteriormente” (grifos nossos)

Sem que conhecimentos previamente estejam estruturados em “**chunks**”, a memória de trabalho é submetida a uma **carga cognitiva** além de sua capacidade.

A consolidação desses conhecimentos e habilidades em estruturas se dá com a **prática deliberada**; diante de novos contextos, tarefas, problemas, a memória de trabalho **recupera** esses blocos da memória de longo prazo.





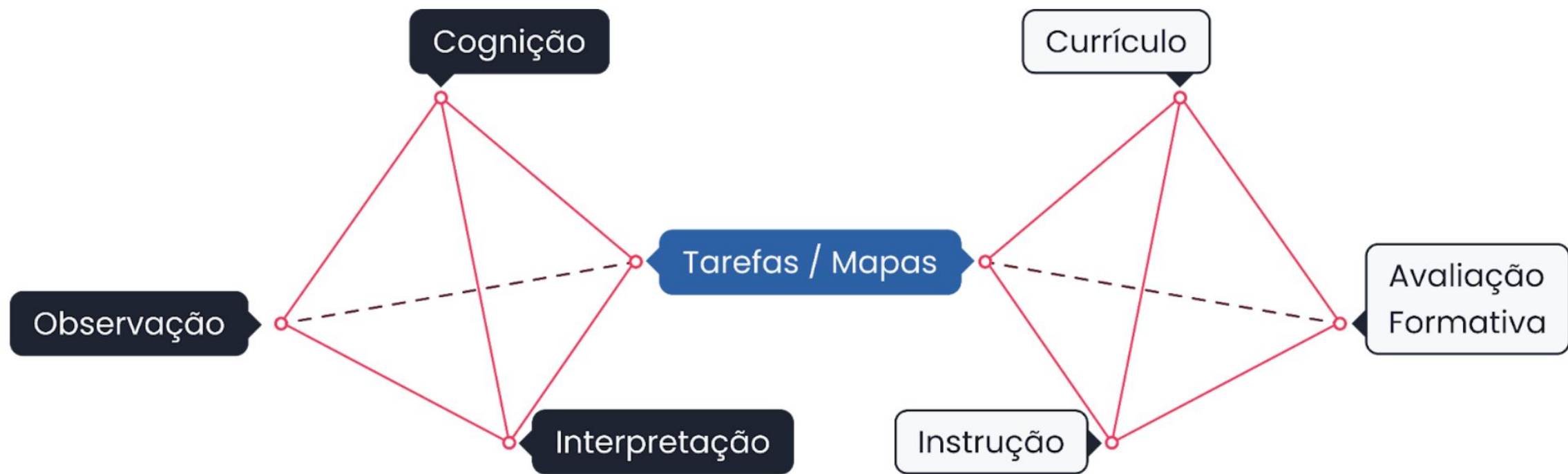
É indispensável que os alunos adquiram e estructurem repertório de conhecimentos prévios que possam ser recuperados quando forem demandados/mobilizados diante de uma tarefa.

No ensino de Matemática, em particular, é necessário levar o estudante a progredir etapa a etapa, começando a perceber os conceitos, dos mais elementares aos mais complexos.

Paralelamente, é necessário formalizá-los em situações gerais. Finalmente, é desejável aplicá-los criativamente. (...) Podem se estabelecer marcos no domínio de um conceito matemático ou de um conjunto de conceitos relacionados. Nuno Crato. "O eduquês em discurso direto", p. 69.

Bases conceituais da avaliação formativa

Triângulos instrucional e avaliativo



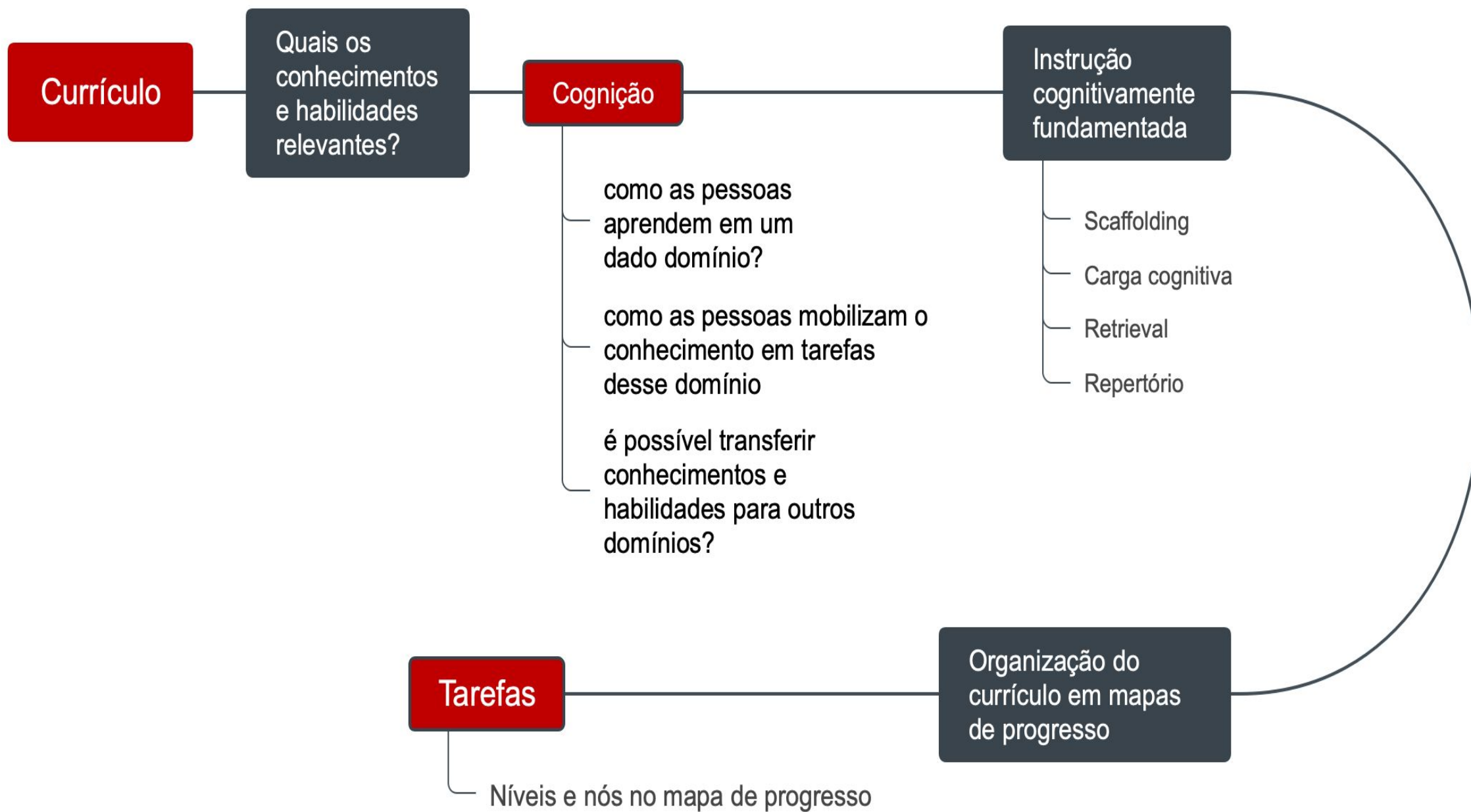
Triângulo instrucional: PDCA pedagógico

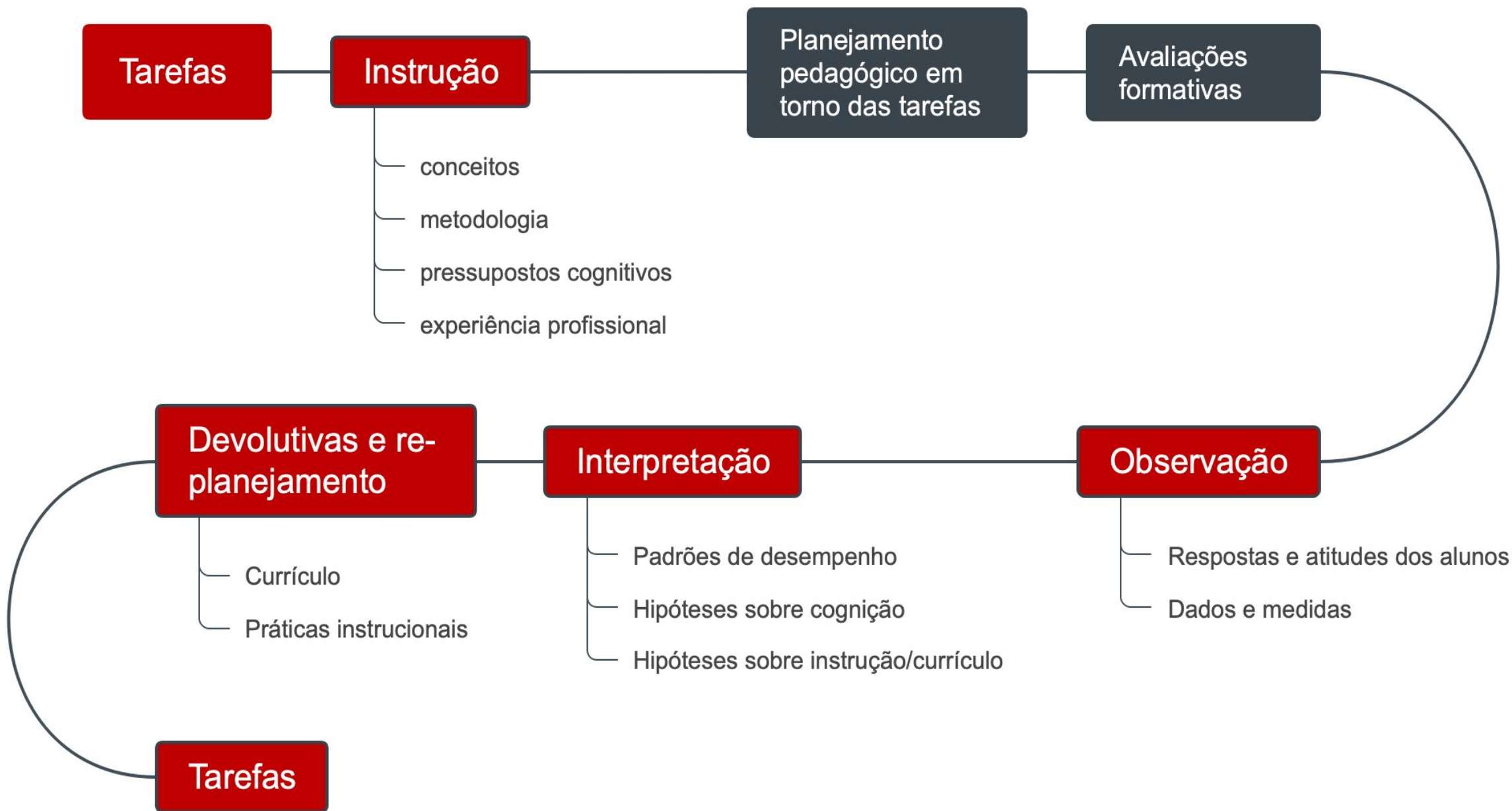
O núcleo pedagógico na escola tem seus componentes e relações recíprocas representados no triângulo instrucional.

A dinâmica do núcleo deveria considerar as seguintes perguntas fundamentais, dado um domínio de conhecimento:

- O que ensinar? Vértice do **currículo**.
- Como ensinar? Vértice do **ensino**.
- Como as pessoas aprendem? Vértice do **aprendizado/cognição**.





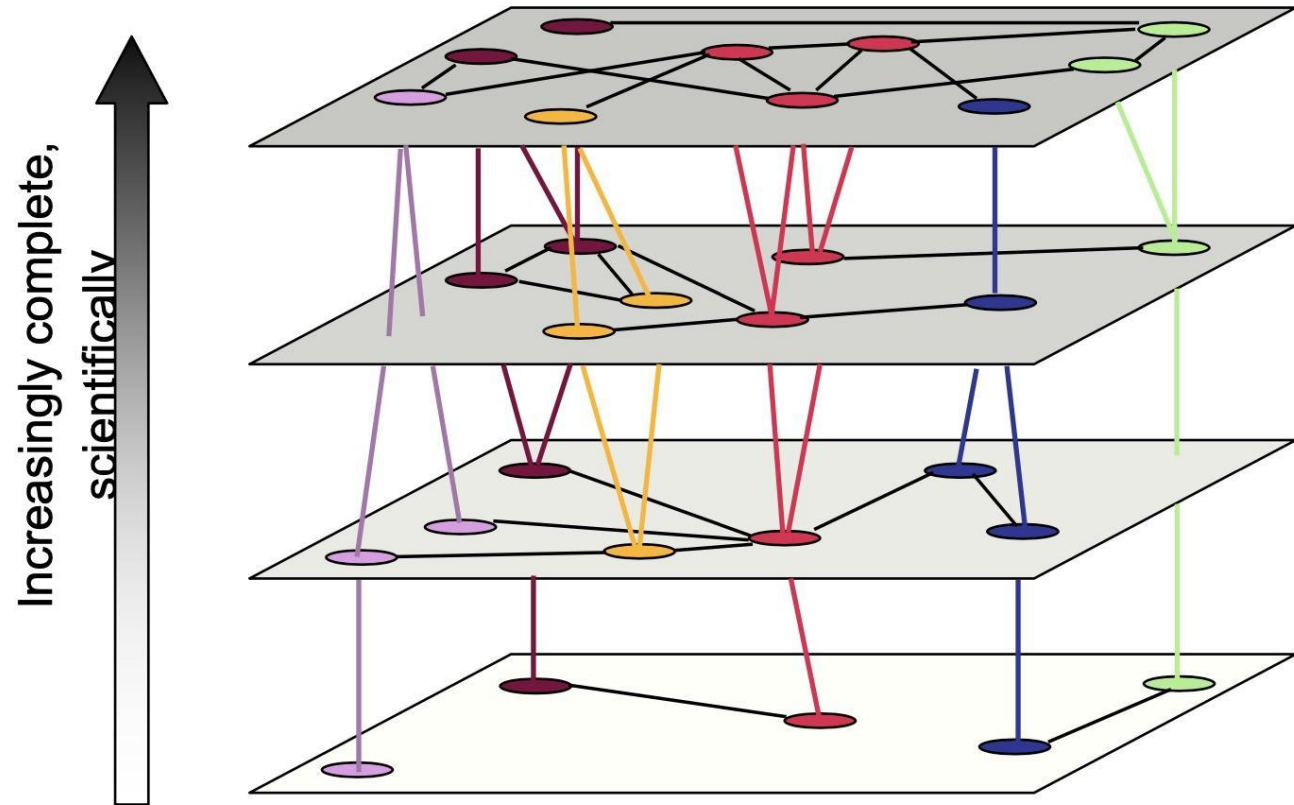


Mapas de progresso

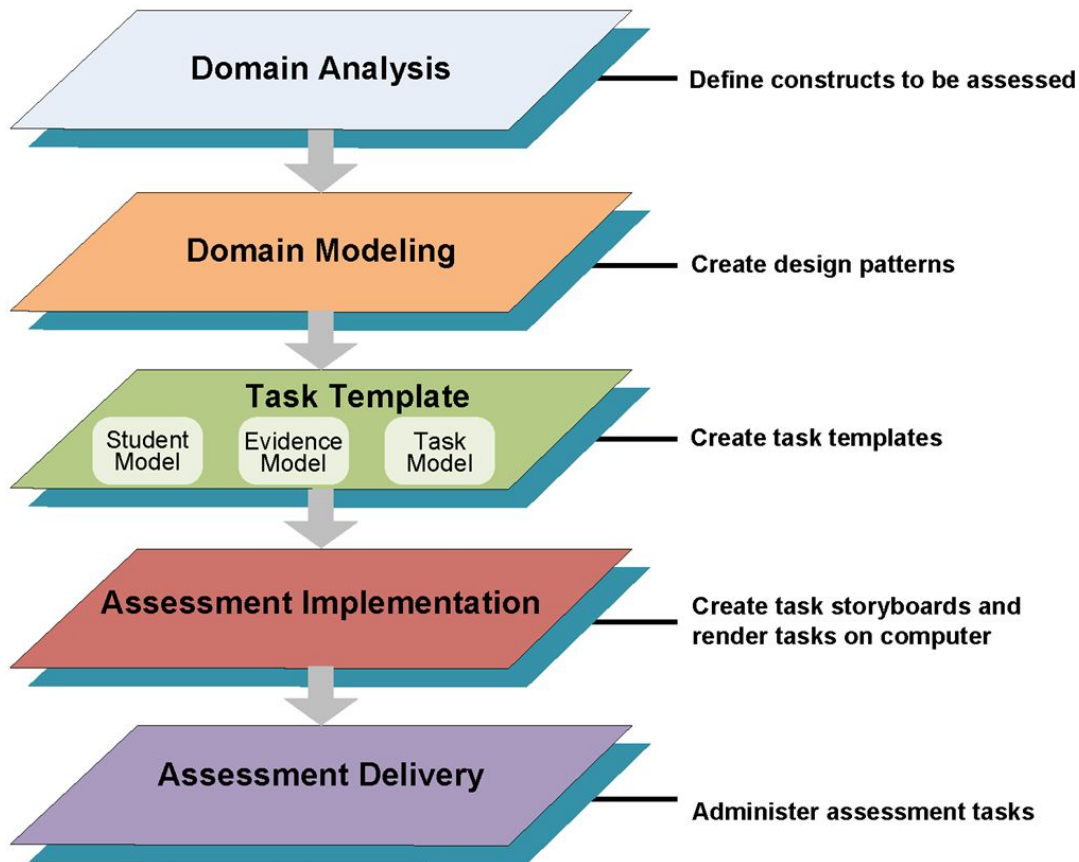
Níveis de organização na progressão curricular e na consolidação de estruturas (*chunks*) na memória de longo prazo.

Conectividade crescente entre os elementos de repertório mobilizados e combinados em tarefas.

Progressão revisitando e conferindo novos significados a conhecimentos prévios.

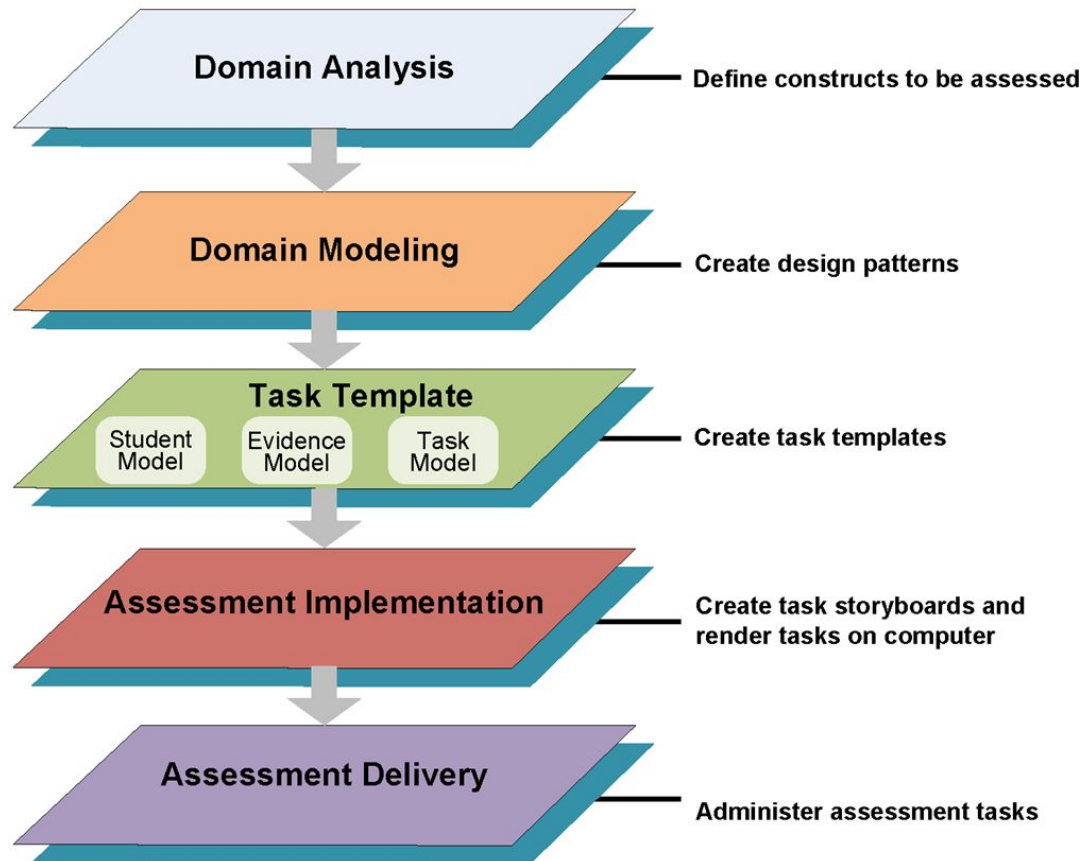


Camadas do evidence-centered design (ECD)



- A análise de domínio envolve a elaboração de **matrizes de saberes e mapas de progresso**: conhecimentos, habilidades e processos cognitivos valorizados no domínio de conhecimento.
- A modelagem de domínio especifica **tarefas e padrões de desempenho** característicos da proficiência no domínio de conhecimento.
- **Tarefas** mobilizam conhecimentos, habilidades e atitudes relevantes no domínio do conhecimento.

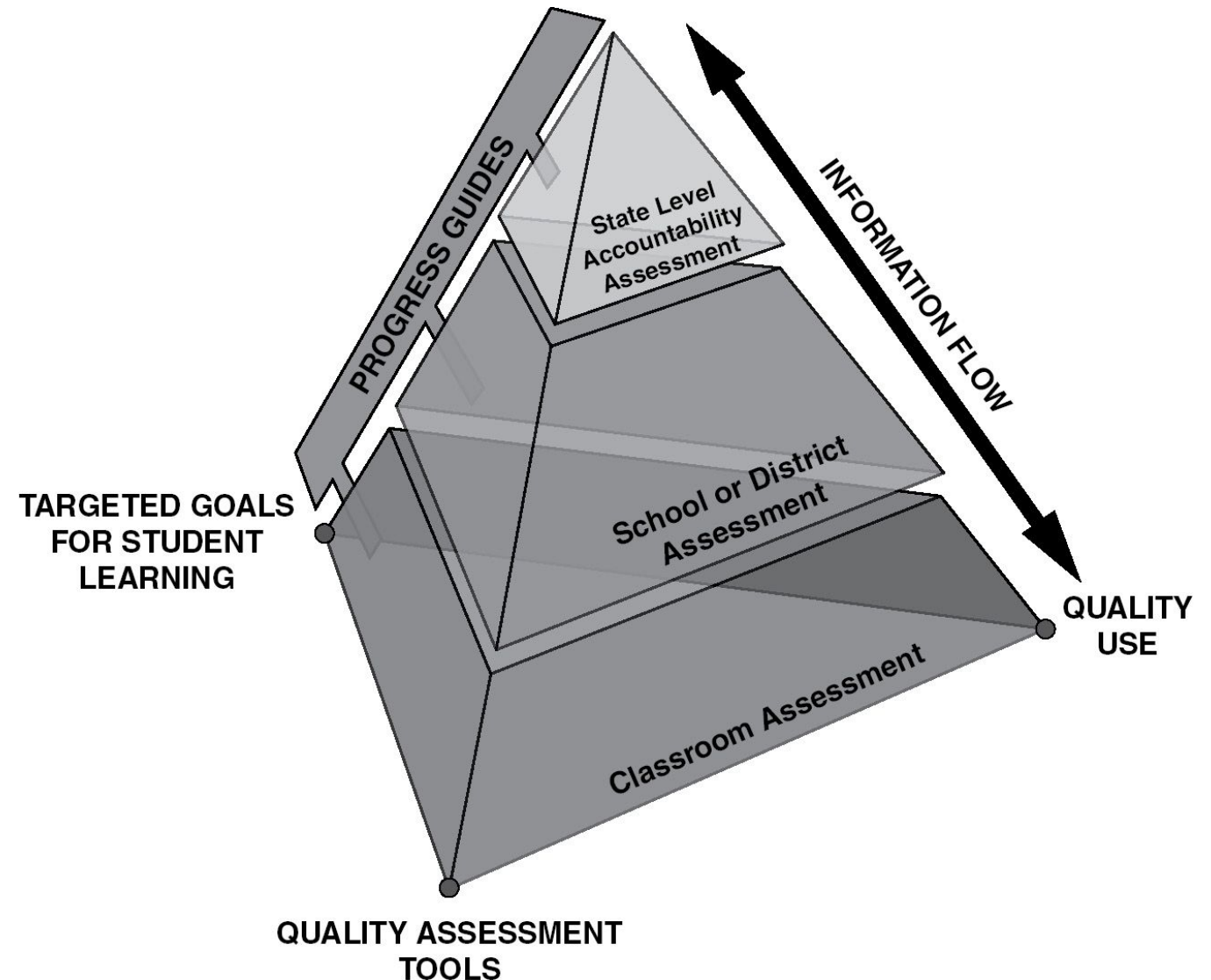
Camadas do evidence-centered design (ECD)



- Os **modelos cognitivos** de como as pessoas aprendem e mobilizam conhecimentos e habilidades em tarefas relevantes é parte dos fundamentos do sistema de avaliação.
- As **respostas/atitudes observadas** em tarefas autênticas devem gerar **evidências válidas** por meio de modelos quantitativos/psicométricos (que conectam a resposta observada à proficiência latente).

Coerência entre escalas e fluxo de informação

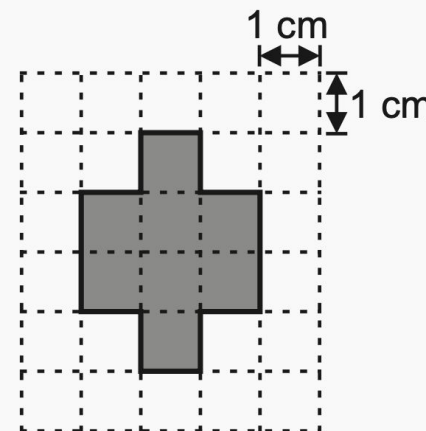
- Coerência entre modelos, instrumentos e usos das avaliações.
- Coerência entre currículo, avaliação e ensino-aprendizagem.
- Fluxo de informação pedagógico-quantitativa entre diferentes agentes e níveis.
- Compartilhamento de conhecimentos e informações: sistema **aberto** de micro e macro gestão das aprendizagens.



Triângulo avaliativo: centralidade
das tarefas

Exemplo de inferências em avaliações externas

(M050676H6) Durante uma aula de desenho, Rodrigo reproduziu o brasão de sua equipe de futebol. A figura desenhada por Rodrigo está representada, em cinza, na malha quadriculada abaixo.



Qual é a medida da área da figura desenhada por Rodrigo?

- A) 6 cm^2 .
- B) 8 cm^2 .
- C) 12 cm^2 .
- D) 14 cm^2 .

Observe a seguinte questão, extraída de teste aplicado em avaliação externa. O item é associado à habilidade “determinar a área de uma figura poligonal não convexa desenhada sobre uma malha quadriculada”, presente na Matriz de Referência do PAEBES (SEDU – Espírito Santo).

Fonte: CAEd e SEDU – Espírito Santo. PAEBES – 2018/
Revista do Professor – Matemática.

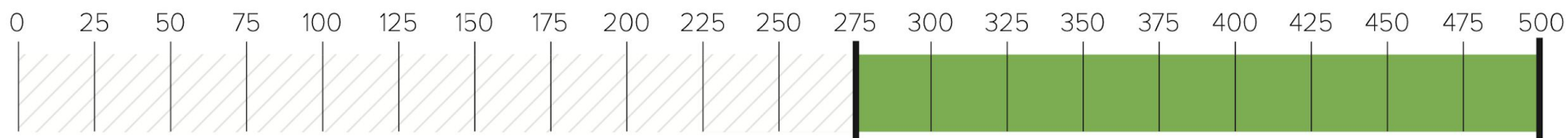
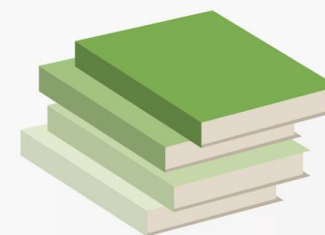
Exemplo de inferências em avaliações externas

Na escala de proficiência usada pelo CAEd, esse item corresponde ao nível avançado de proficiência em Matemática para o quinto ano do Ensino Fundamental.

5º ano do ensino fundamental

Avançado

ACIMA DE 275 PONTOS



Exemplo de inferências em avaliações externas

A inferência baseada na análise desse item foi expressa na publicação do CAEd sobre os resultados do PAEBES – 2018 da seguinte forma:

“Esse item avalia a habilidade de os estudantes resolverem problemas envolvendo o cálculo da área de uma figura poligonal não convexa desenhada sobre uma malha quadriculada.

Os estudantes que marcaram a alternativa B, possivelmente, desenvolveram a habilidade avaliada pelo item.”

Fonte: CAEd e SEDU – Espírito Santo. PAEBES – 2018/

Revista do Professor – Matemática, p. 41.

Avaliação como produção de inferências

A análise de domínio (mais precisamente, a explicitação das premissas cognitivas e curriculares sobre as características da proficiência ou *expertise* no domínio) sustentam as seguintes afirmações, que são logicamente equivalentes:

Inferência 1: proficiente na habilidade avaliada $\Rightarrow$ resolve o problema

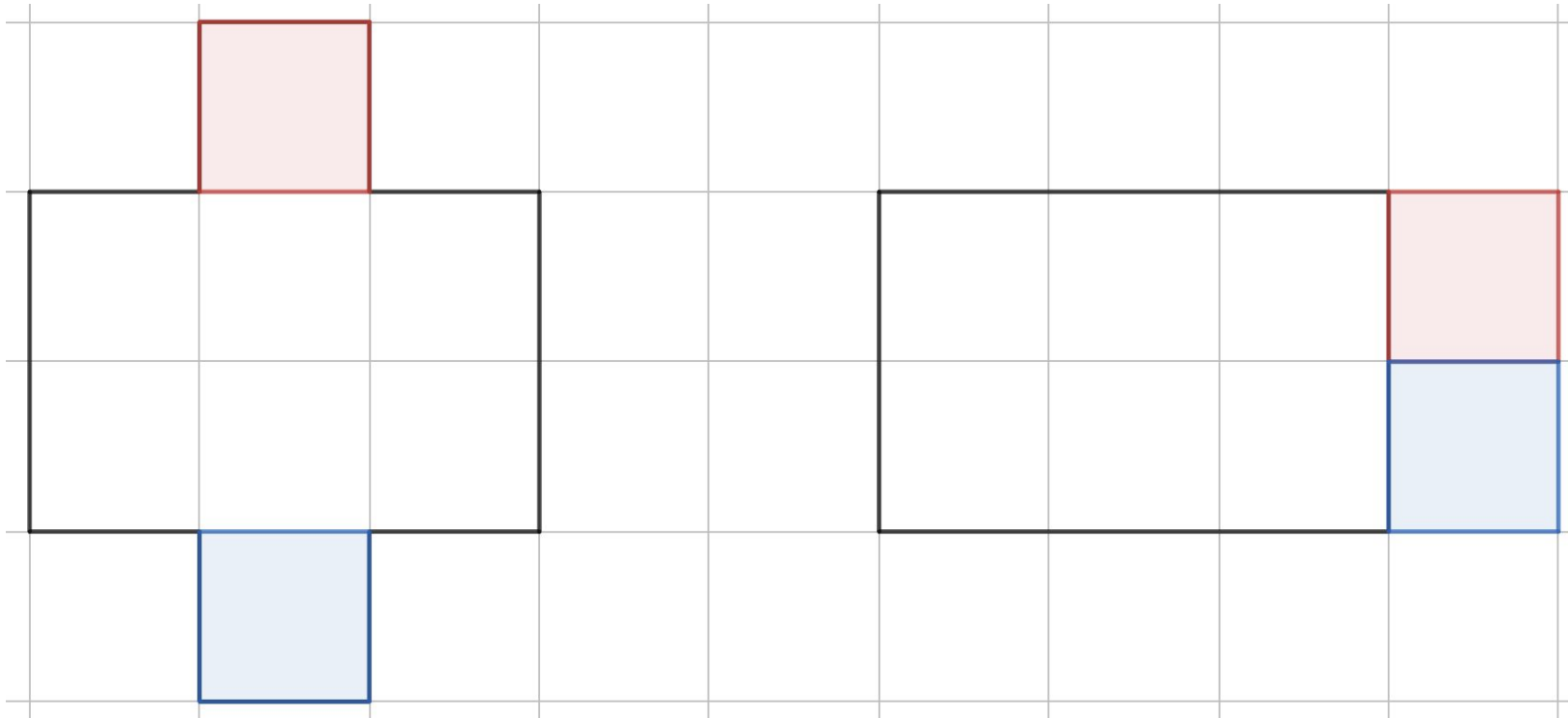
Inferência 1*: não resolve o problema $\Rightarrow$ não proficiente na habilidade avaliada.

Nenhuma dessas proposições é equivalente à inferência expressa no relatório do teste, ou seja, à afirmação

Inferência 2: resolve o problema $\Rightarrow$ proficiente na habilidade avaliada.

Avaliação como produção de inferências

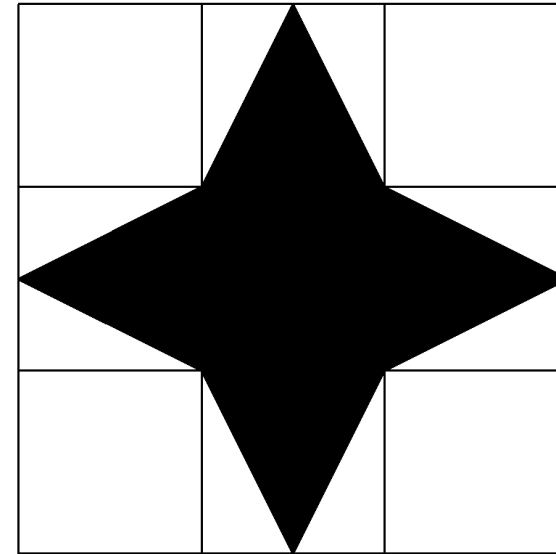
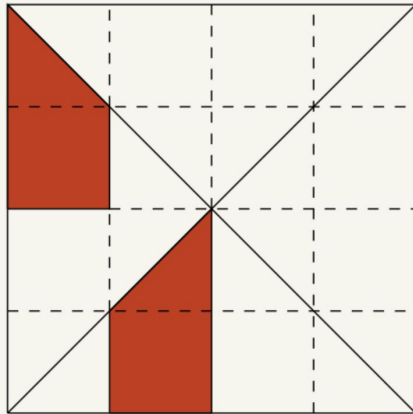
A compreensão conceitual da noção de área, de suas propriedades e das técnicas de sua medição habilitaria estudantes a estratégias de resolução como a seguinte:



Avaliação como produção de inferências

CEnPE. *Considere a seguinte figura, onde destacamos uma área em preto:*

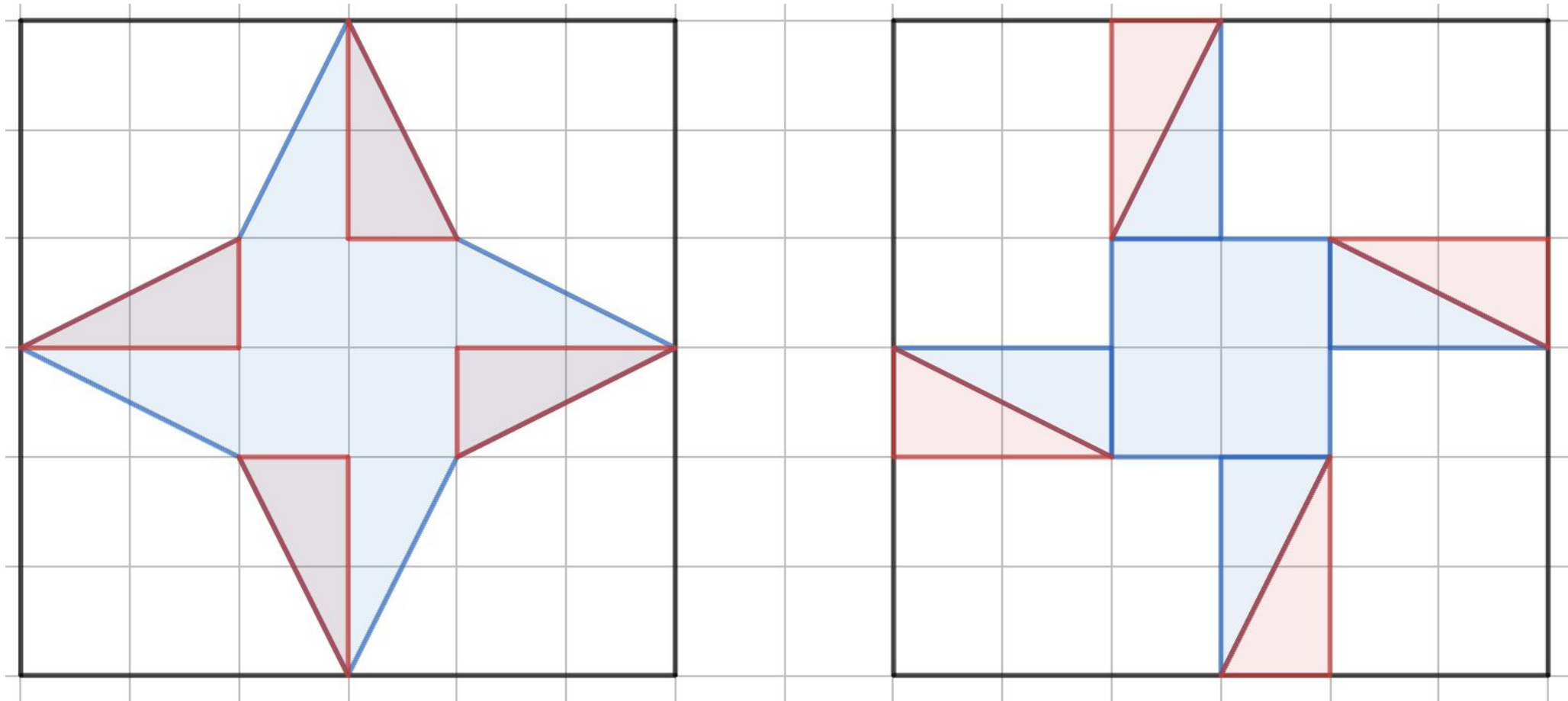
Exercício 2.62 — Banco OBMEP. Na figura a seguir, todos os quadradinhos do tabuleiro são iguais. Que porcentagem do quadrado maior a região pintada cobre?



Qual a razão entre a área destacada em preto e a área do quadrado maior?

- A) $1/9$ B) $1/3$ C) $1/2$ D) $5/9$ E) $5/16$

Avaliação como produção de inferências



CONTINENT AREA

Below is a map of Antarctica.



Show your work and explain how you made your estimate. (You can draw over the map if it helps you with your estimation)

Answer:

To receive full credit, students needed to provide the correct answer, between 12,000,000 square kilometers and 18,000,000 square kilometers (units not required), and could show evidence of using a correct method such as drawing a square or circle to estimate the answer. Students who provided the correct answer but did not show any work also received full credit.

Students who show evidence of using a correct method, but provided an incorrect answer, received partial credit.

Estimate the area of Antarctica using the map scale.

Estimated area of Antarctica = between sq kms and
sq kms

Avaliação como produção de inferências

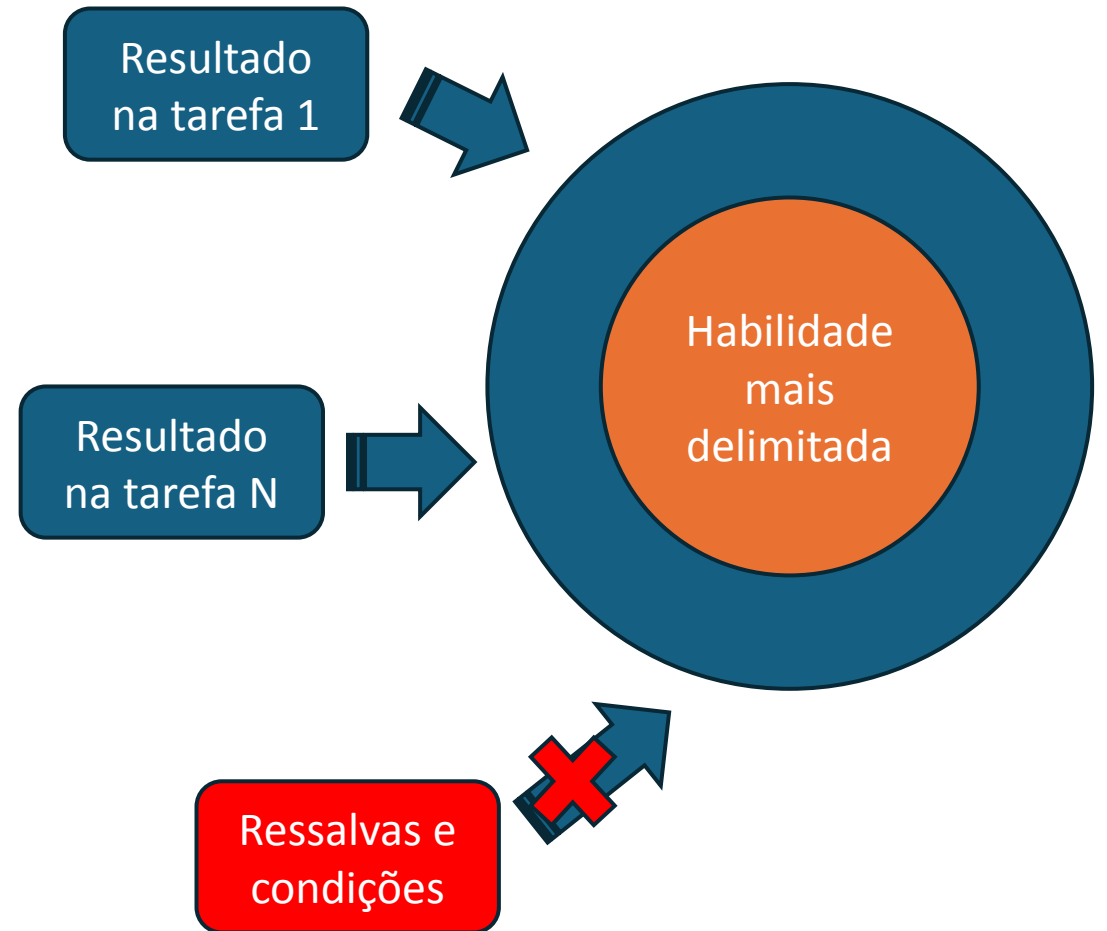
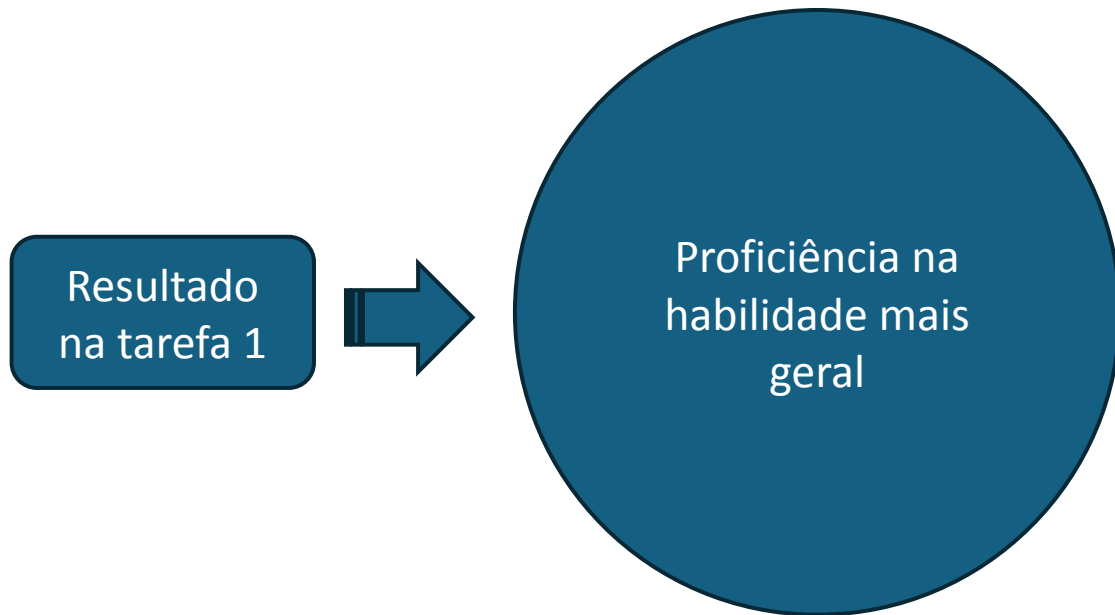
Portanto, os resultados do trabalho dos estudantes nas tarefas do PAEBES, do CEnPE e da OBMEP, **conjuntamente**, poderiam embasar inferências sobre a proficiência em uma **habilidade mais específica** do que aquela considerada no PAEBES.

Uma possibilidade de especificar e delimitar mais precisamente essa habilidade seria a seguinte:

*“determinar a área de uma figura poligonal não convexa desenhada sobre uma malha quadriculada, **utilizando propriedades fundamentais da noção de área, tais como a aditividade e a invariância por isometrias do plano.**”*

Avaliação como produções de inferências

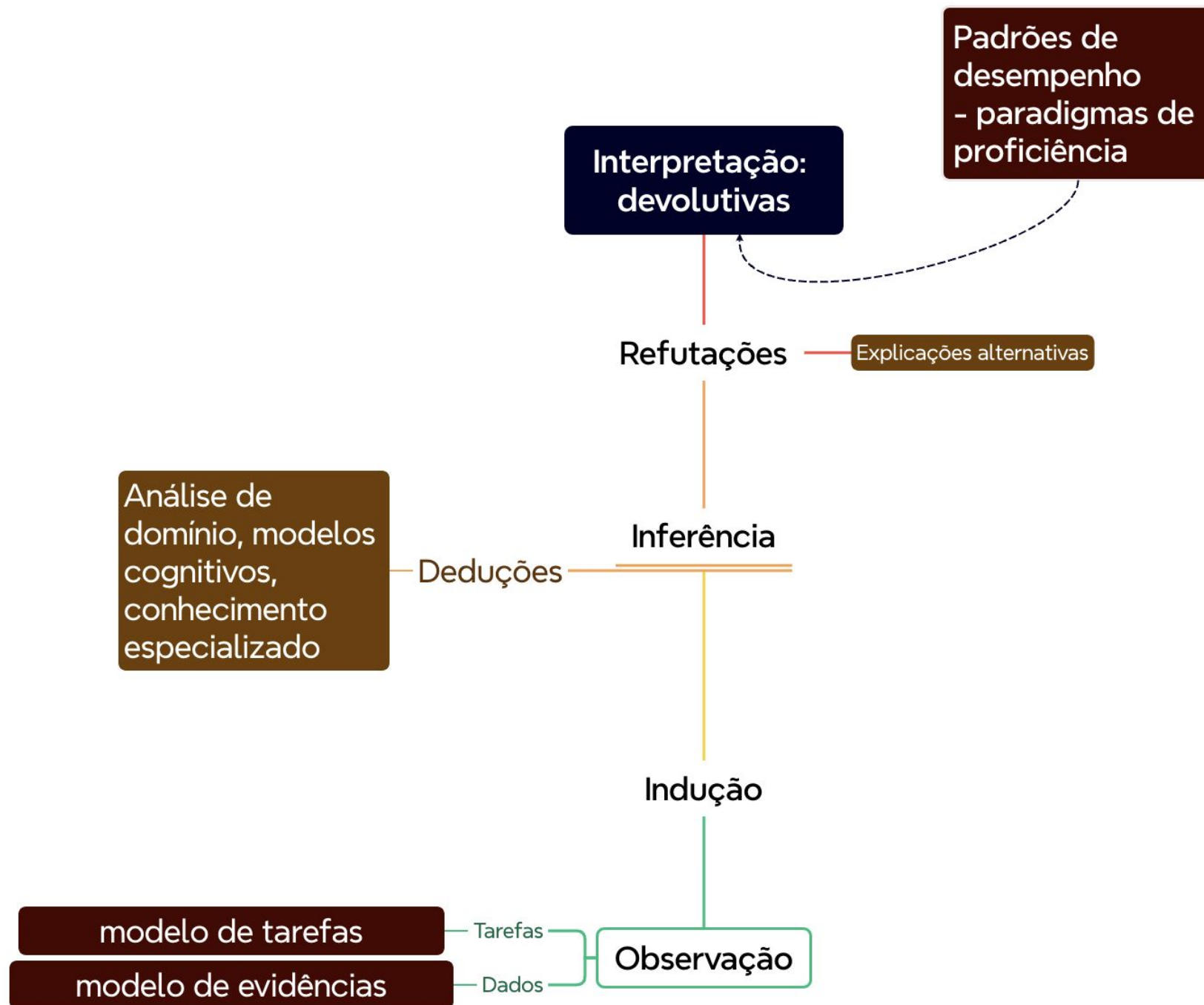
Iniciamos com “*claims*” como no diagrama da esquerda, e refinamos essas afirmações para uma estrutura argumentativa como no diagrama da direita.



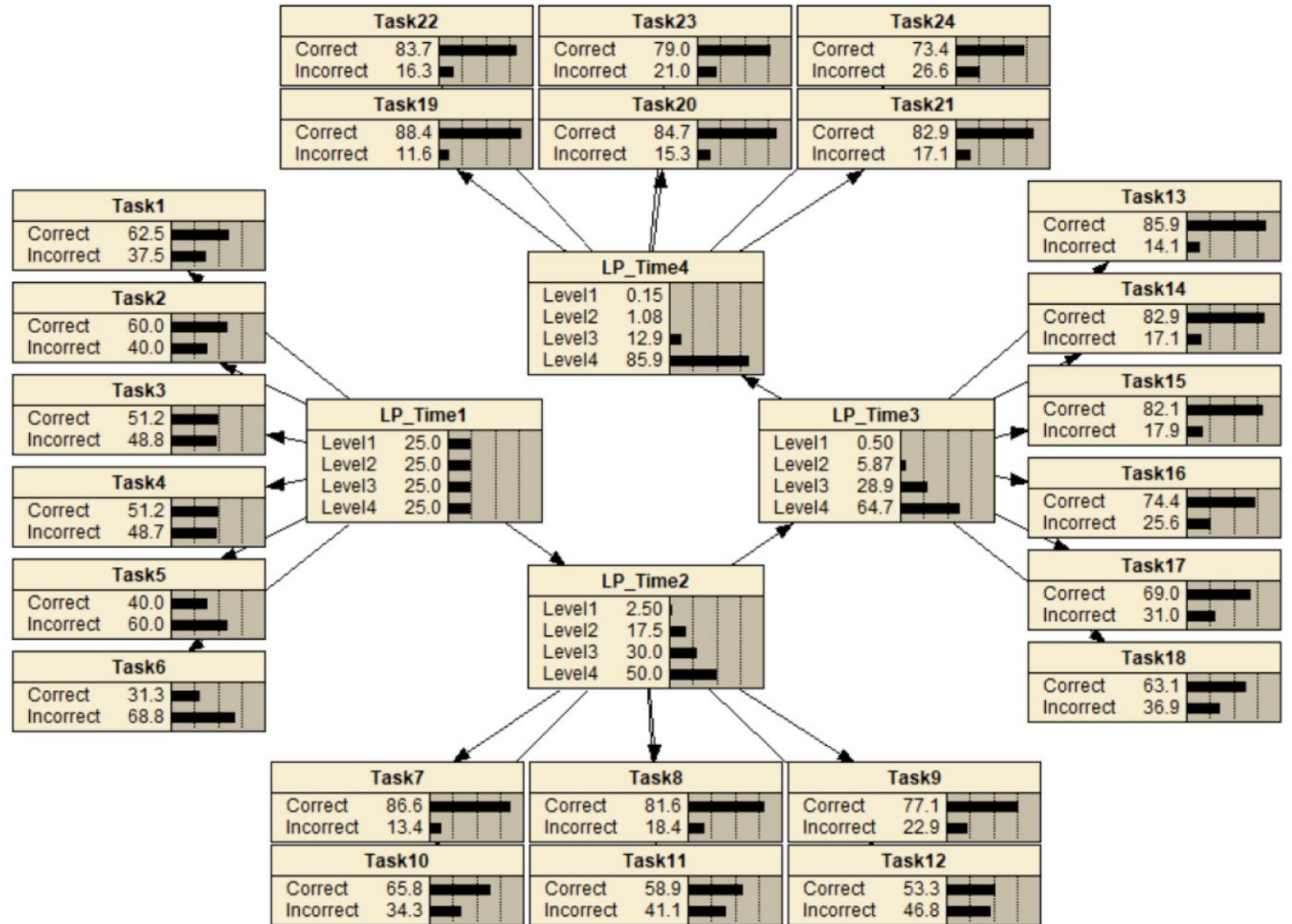
Estrutura argumentativa na base da avaliação

A conexão entre o **modelo de evidências** $p(X|\vartheta)$ e o **modelo de estudante** $p(\vartheta|X)$ é formalmente descrita por

$$p(\vartheta|X) \propto p(X|\vartheta) \cdot p(\vartheta).$$



Redes bayesianas de tarefas



Modelagem do domínio & modelagem cognitiva

A arquitetura das tarefas: currículo & cognição

Tarefas devem refletir um **desenho cognitivo e curricular**, mobilizando conhecimentos e habilidades relevantes, de modo revelador da **proficiência**.

Professores e coordenadores devem ser fortemente envolvidos na **seleção de tarefas** ao longo dos percursos cognitivos em um **mapa de progressos**.

Tarefa

Um arquiteto está comparando quatro modelos de lâmpada quanto a duas variáveis:

- *potência (em watts);*
- *luminosidade (em lúmens), ou seja, o quanto iluminam um ambiente.*

Modelo de lâmpada	Potência (watts)	Luminosidade (lúmens)
M_1	60	1 440
M_2	40	2 560
M_3	24	1 800
M_4	18	1 080

A eficiência de um dado modelo de lâmpada é a razão entre luminosidade e potência.

Questão 1. *Qual dos quatro modelos de lâmpada é o mais eficiente? Justifique sua resposta.*

Questão 2. *Mantida sua luminosidade, qual deveria ser a potência da lâmpada do modelo M_1 para que se tornasse tão eficiente quanto a lâmpada do modelo M_4 ?*

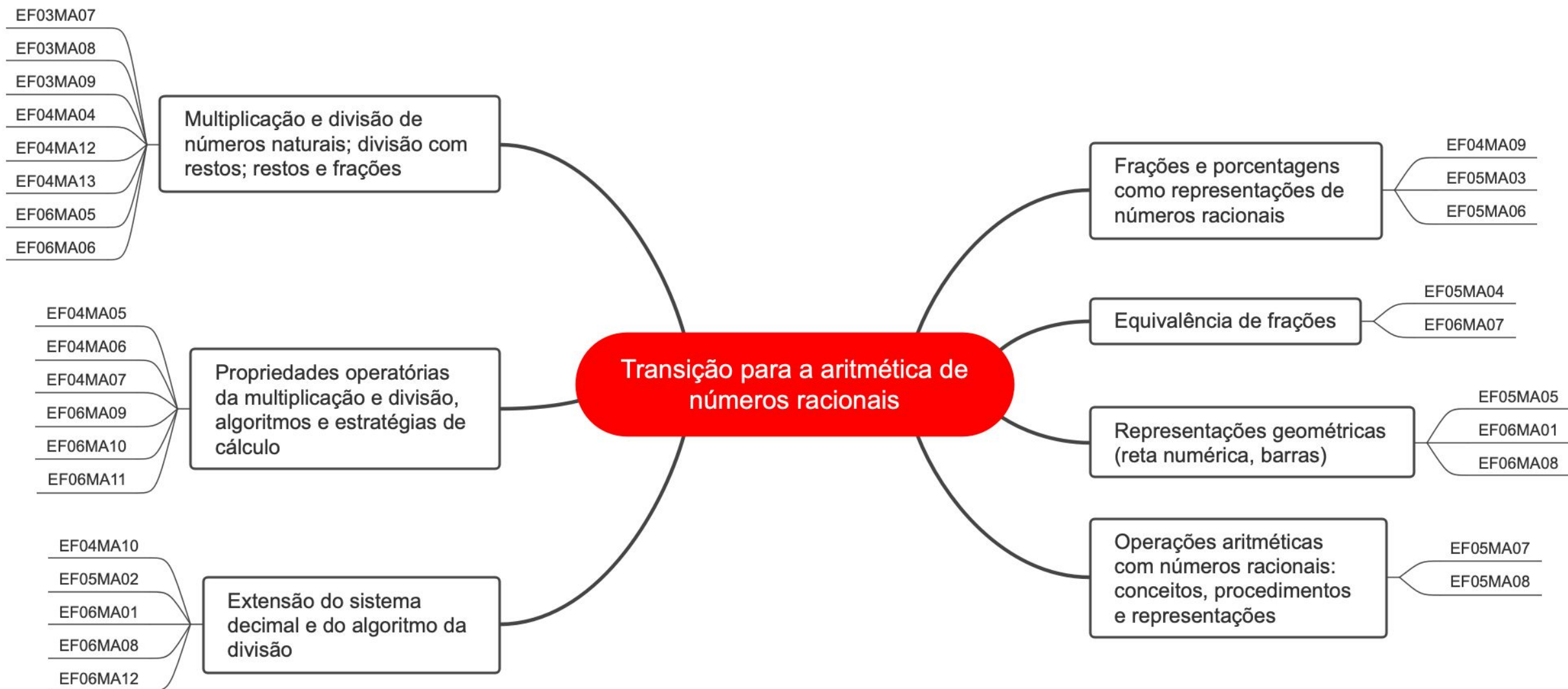
Questão 3. *Mantida sua potência, qual deveria ser a luminosidade da lâmpada do modelo M_2 para que se tornasse tão eficiente quanto a lâmpada do modelo M_3 ?*

Conhecimento do conteúdo e dos estudantes, currículo e cognição.

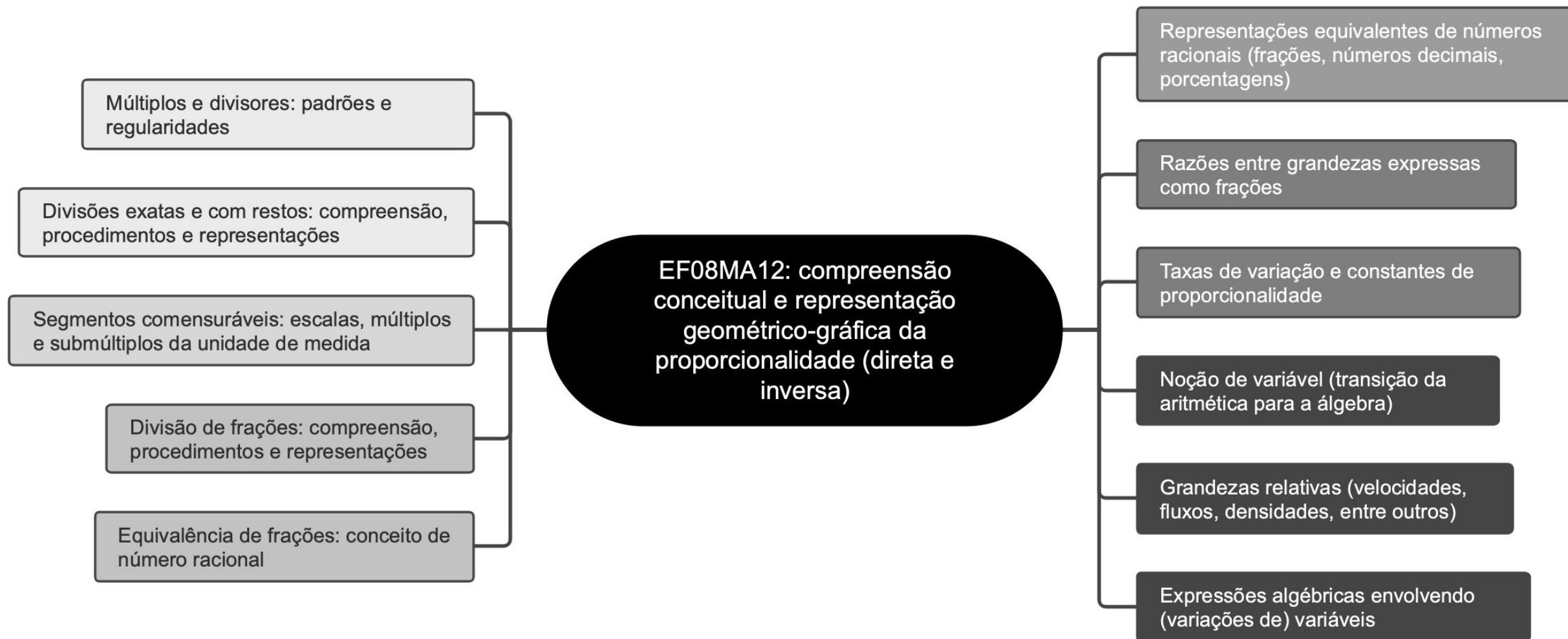
Domínios cognitivos	Questão 1	Questão 2	Questão 3
Compreender o contexto; identificar as grandezas relevantes; ler e representar os dados	1	1/4	1/4
Resgatar os conceitos e procedimentos (razões e comparações); organizar conhecimentos prévios	1	1/2	1/4
Elaborar/refinar estratégia de resolução dos problemas; efetuar/supervisionar os procedimentos	1	1/2	1/2
Verificação, interpretação e comunicação dos procedimentos e resultados; reorganizar o repertório	1	1	1

Habilidades (nós no mapa de progresso)	H1	H2	H3	H4
H1. Representar os dados em termos de pares de variáveis	1	1		
H2. Modelar grandezas relativas em termos de razões entre valores na tabela	1	1	1	
H3. Determinar e comparar as razões usando métodos aritméticos ou gráficos		1	1	1
H4. Determinar quantidades desconhecidas em uma relação de proporcionalidade por métodos algébricos ou gráficos			1	1

Trecho em um mapa de progressos



Elementos de repertório na consolidação de habilidades



Os elementos de repertório são necessários para o desenvolvimento da habilidade. No centro do diagrama; por sua vez, tarefas mobilizando essa habilidade trazem novos significados e usos para esse repertório.

Etapas básicas

Identificar as variáveis relevantes (distâncias e tempos); perceber a correspondência entre distâncias e tempos representada no gráfico.

Associar pontos no gráfico e nos eixos a coordenadas e, portanto, a valores das variáveis relevantes

Calcular a razão entre variações de distâncias e variações dos tempos correspondentes

Etapas intermediárias

inferir/predizer distâncias percorridas em tempos dados, e vice-versa, a partir da análise das informações nos eixos e no gráfico

Interpretar a taxa de variação entre distâncias e tempos em termos da informação sobre velocidade dado no contexto

Expressar a taxa de variação (velocidades nos trechos) por meio de diferentes razões e frações equivalentes

Etapas culminantes

Traçar gráficos que correspondam a diferentes velocidades constantes e comparar suas declividades

Relacionar a taxa de variação à declividade do gráfico, ou seja, às razões entre medidas dos segmentos correspondentes nos eixos horizontal e vertical

Observação & interpretação: dos dados às evidências

- **Respostas à questão 1 - tipo I**

- 2560. *Ela é mais que todas.*
- *Diria modelo 2 por iluminar melhor o ambiente em 2560, mas talvez a mais eficiente seja o modelo 4 por ter menor potência, mesmo iluminando o ambiente em 1080.*

- **Respostas à questão 1 - tipo II**

- *I, pois quanto menor o valor da divisão mais eficiente é.*
- *II, pois a diferença entre luminosidade e potência é bem maior do que todas as outras.*

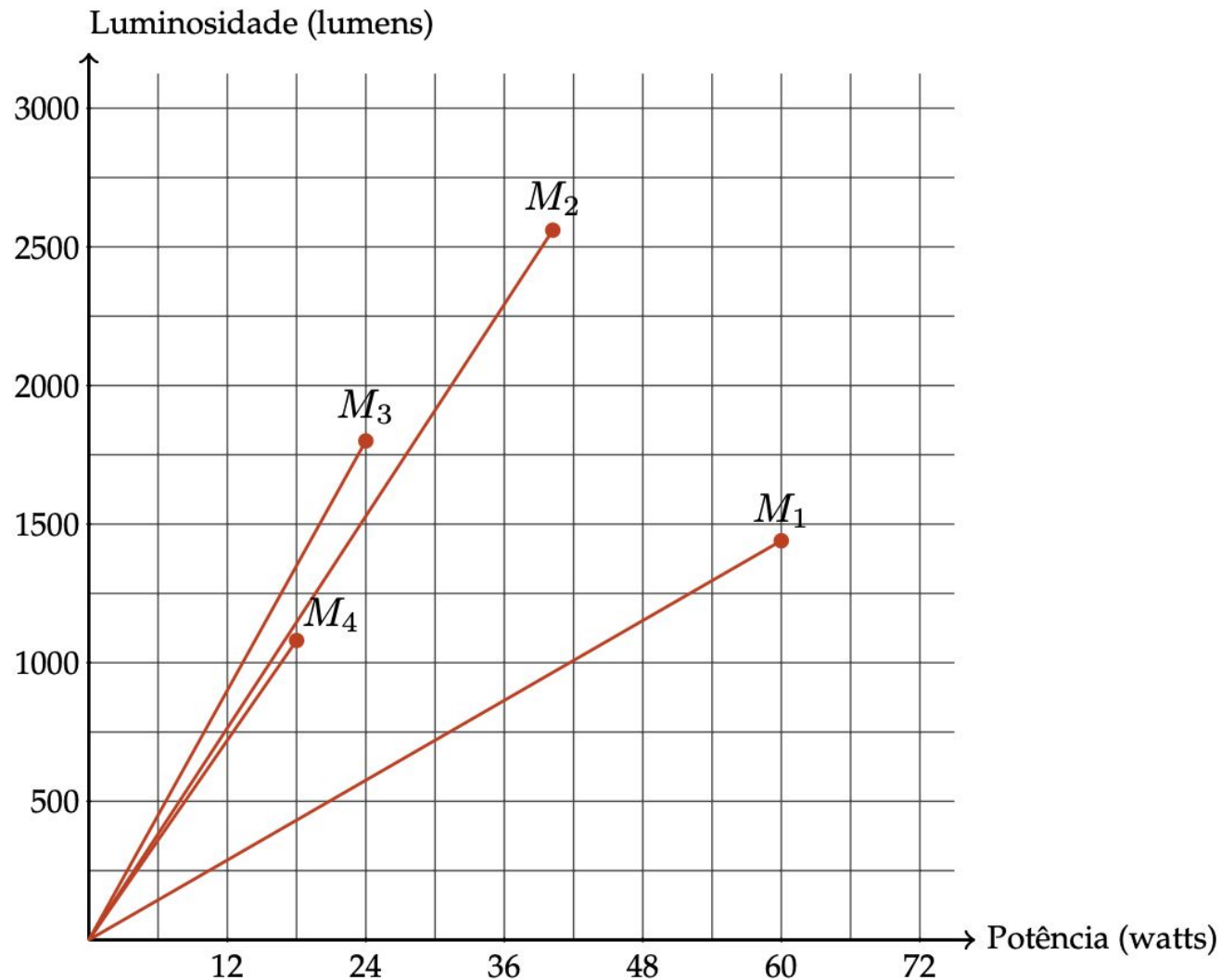
- **Respostas à questão 2 - tipo I**

- *15 ou 16 watts. Eu cheguei nessa conclusão pois, se o modelo M_4 tem potência de 18 watts, uma lâmpada com menor potência que 18 será mais eficiente*
- *1122. Se a lâmpada M_1 tem 42 de potência a mais que a lâmpada M_4 , então tem que ter luminosidade para se igualar ou ser menor.*

- **Respostas à questão 2 - tipo II**

- $1440 : 18 = 80$
- $1440/20 = 72 > 60$

Observação & interpretação: dos dados às evidências



Solução dada por Laís

Solução proposta por Pedro

Resposta: 3000. Fiz a regra de três:

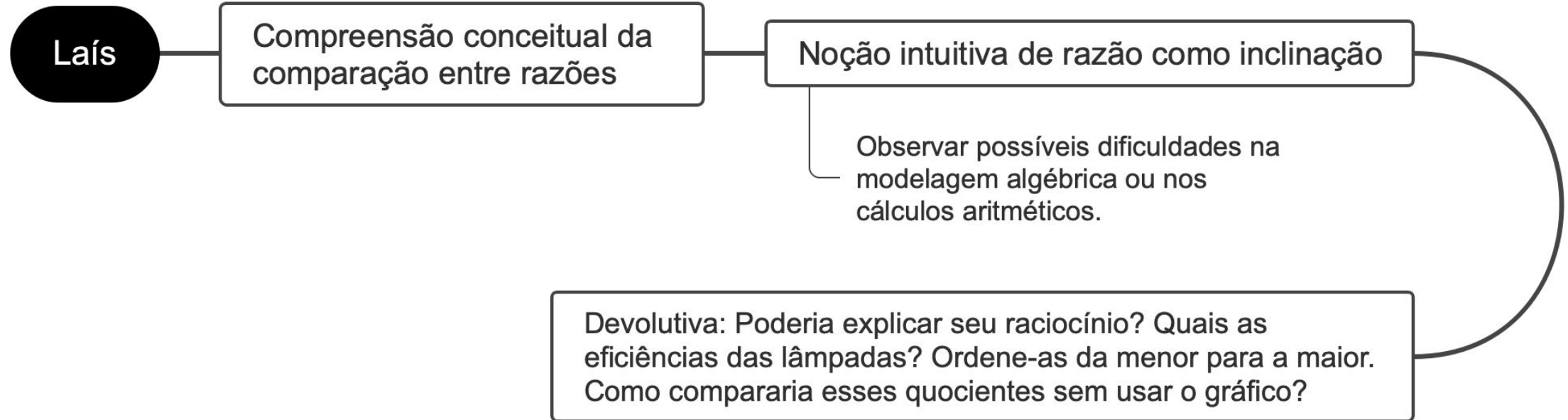
40 ----- x;

24 -----1800,

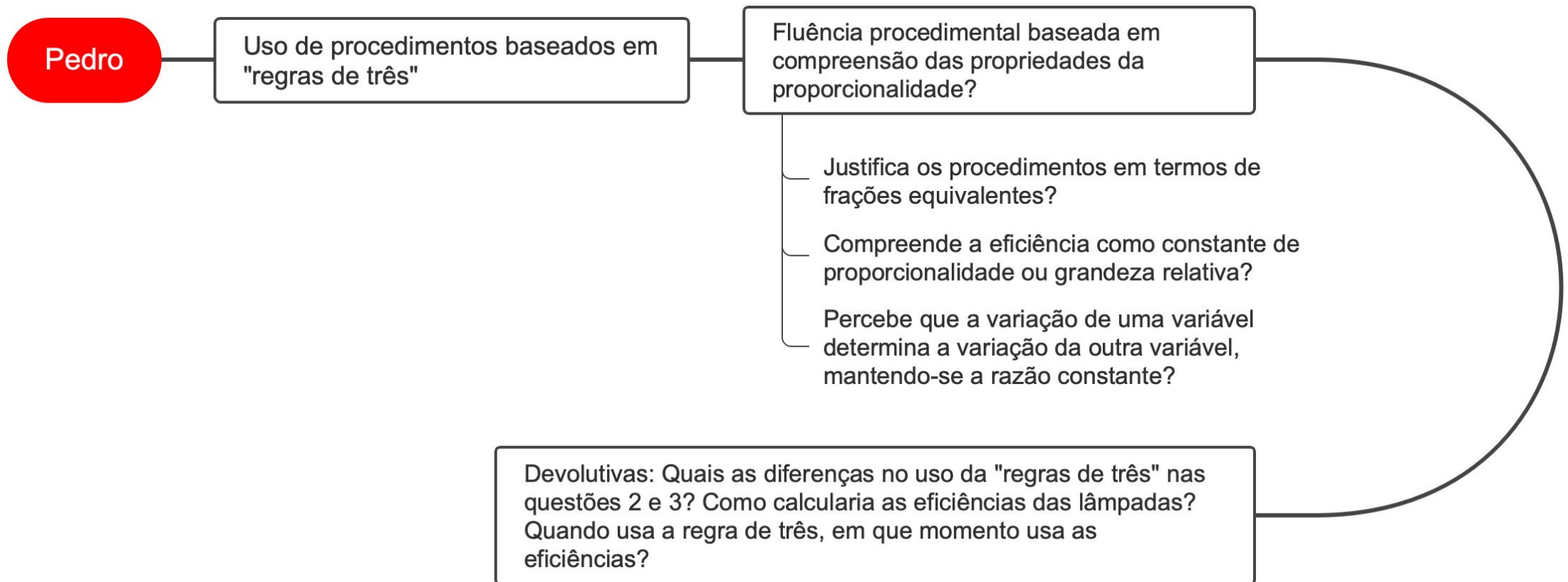
o x porque eu ainda não sei o valor da luminosidade

Multipliquei 40×1800 e depois dividi por 24.

Rubricas & devolutivas: interpretação & instrução; demanda por CPC



Rubricas & devolutivas: interpretação & instrução; demanda por CPC



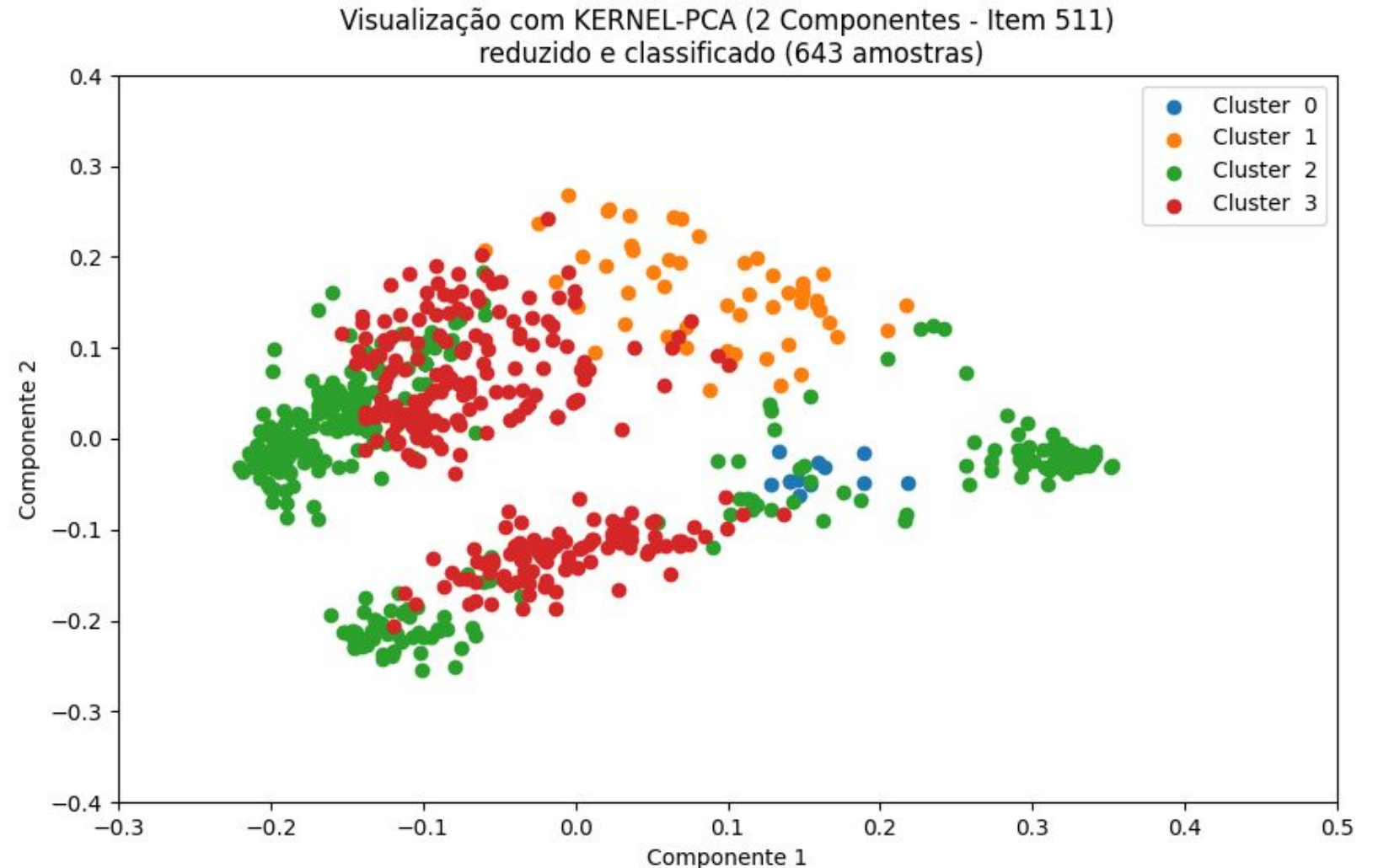
Observação, interpretação, devolutivas, instrução

Categorias de respostas	Interpretações plausíveis	Recomendações
Questão 1 – tipo I	Os estudantes consideram os valores máximo ou mínimo das grandezas absolutas em vez das relativas.	Atividades que demonstrem que as escolhas “ótimas” envolvem a comparação entre grandezas e que essa comparação é expressa pelo quociente entre seus valores.
Questão 1 – tipo II	Equívocos conceituais e procedimentais na modelagem/descrição aritmética das grandezas relativas	Atividades (em outros contextos, eventualmente) que esclareçam a distinção entre quociente e diferença na expressão de razões ou grandezas relativas; e que ajudem a especificar os papéis do dividendo e divisor ou do numerador e denominador em uma dada razão.

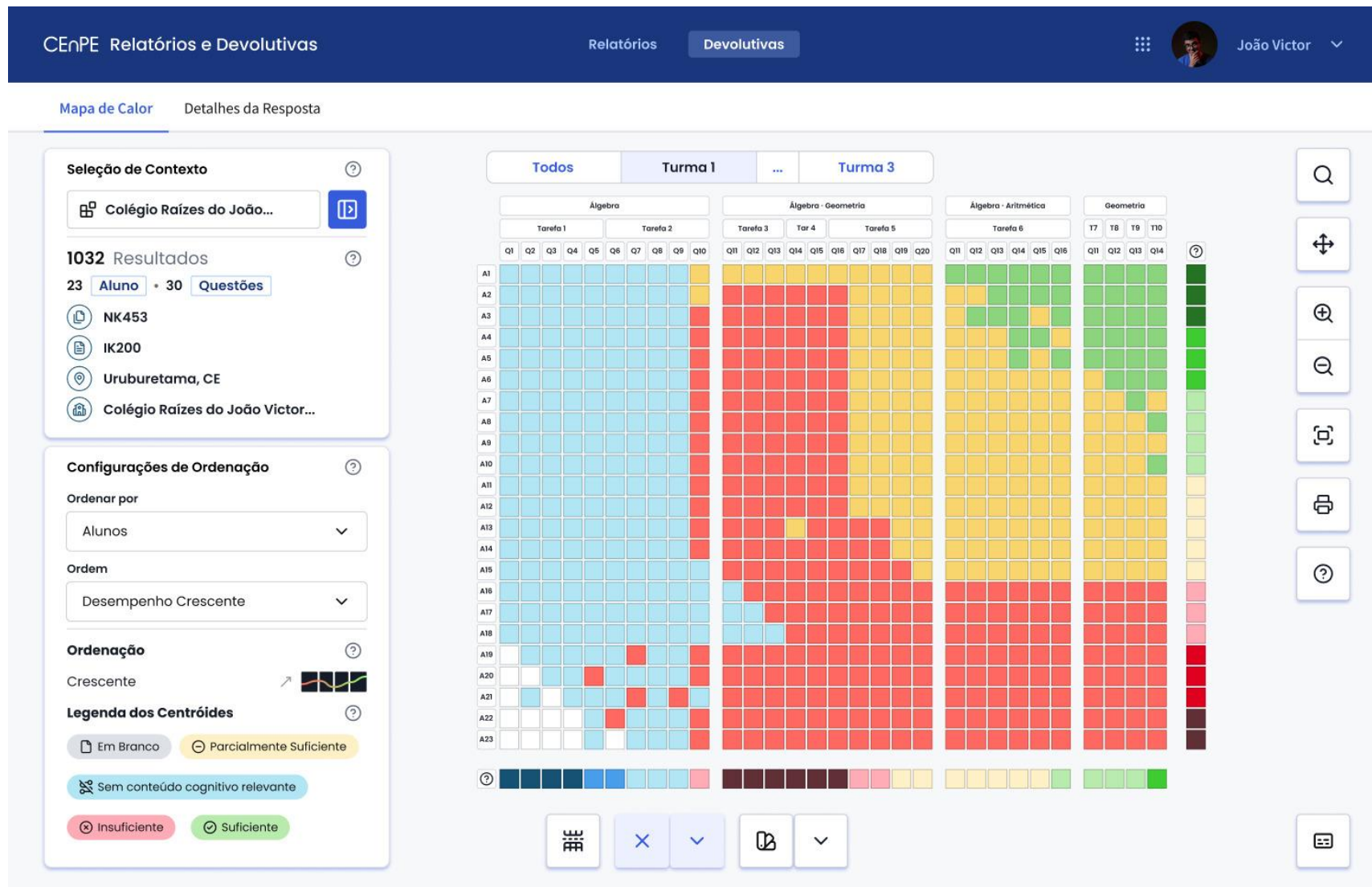
Ciência de Dados Educacionais

Uso de ciência de dados & IA em prol do ensino

Como delimitar perfis de aprendizagem e interpretar **padrões de desempenho** com base em rubricas, tornando o ensino mais eficiente e embasado em evidências ?



Observação, interpretação e ensino



Como interpretar os dados de uma avaliação dos pontos de vista cognitivo, curricular e instrucional?

Mapa de Calor Detalhes da Resposta

Seleção de Contexto

Avaliação Português 02 - 8º ano - Sobral

1300 Resultados

50 Alunos • 26 Itens

- Avaliação Português 02 - 8º an...
- Português 02
- Ceará, Sobral
- ESCOLA JOSE PARENTE PRADO

Configurações de Ordenação

Ordenar por

Alunos e Itens

Ordem

Sem ordenação

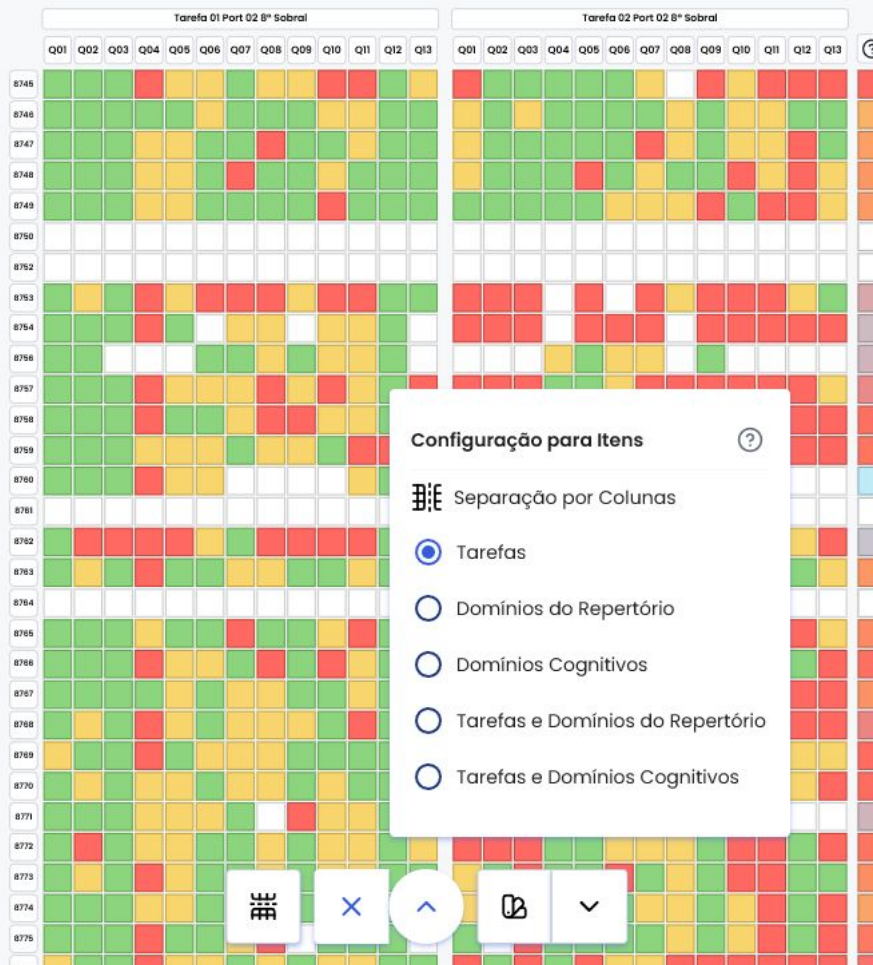
Ordenação

Sem Ordenação

Legenda dos Centróides

- Insuficiente
- Parcialmente Suficiente
- Suficiente
- Em branco
- Sem conteúdo cognitivo relevante

Todas 8-D



Voltar

Modelos diagnóstico-cognitivos

Atributos cognitivos por tarefa

Atributo 1. Utilizar conceitos e procedimentos com compreensão conceitual

Atributo 2. Efetuar cálculos e medições com correção e fluência

Atributo 3. Elaborar raciocínio matemático como estratégia para resolver problema

Atributo 4. Modelar e representar situações em termos aritméticos ou algébricos

Item	Atributo 1	Atributo 2	Atributo 3	Atributo 4
534	1	0	0	0
535	1	1	0	0
536	1	1	0	0
537	1	1	0	0
538	1	0	0	1
539	1	0	0	1
540	1	0	0	1
541	1	0	0	1
542	1	0	0	1
543	1	0	1	1
544	1	0	1	1
545	1	0	0	0
546	1	0	0	0
547	1	0	1	1
548	0	0	1	1
549	1	0	1	1
550	1	0	0	1
551	1	0	0	1
552	1	1	0	0
553	1	1	1	1
554	1	0	0	1
555	1	1	1	1
556	1	1	1	1

Ajustes do modelos em função das observações

- Matriz Q a priori

$Q_t =$

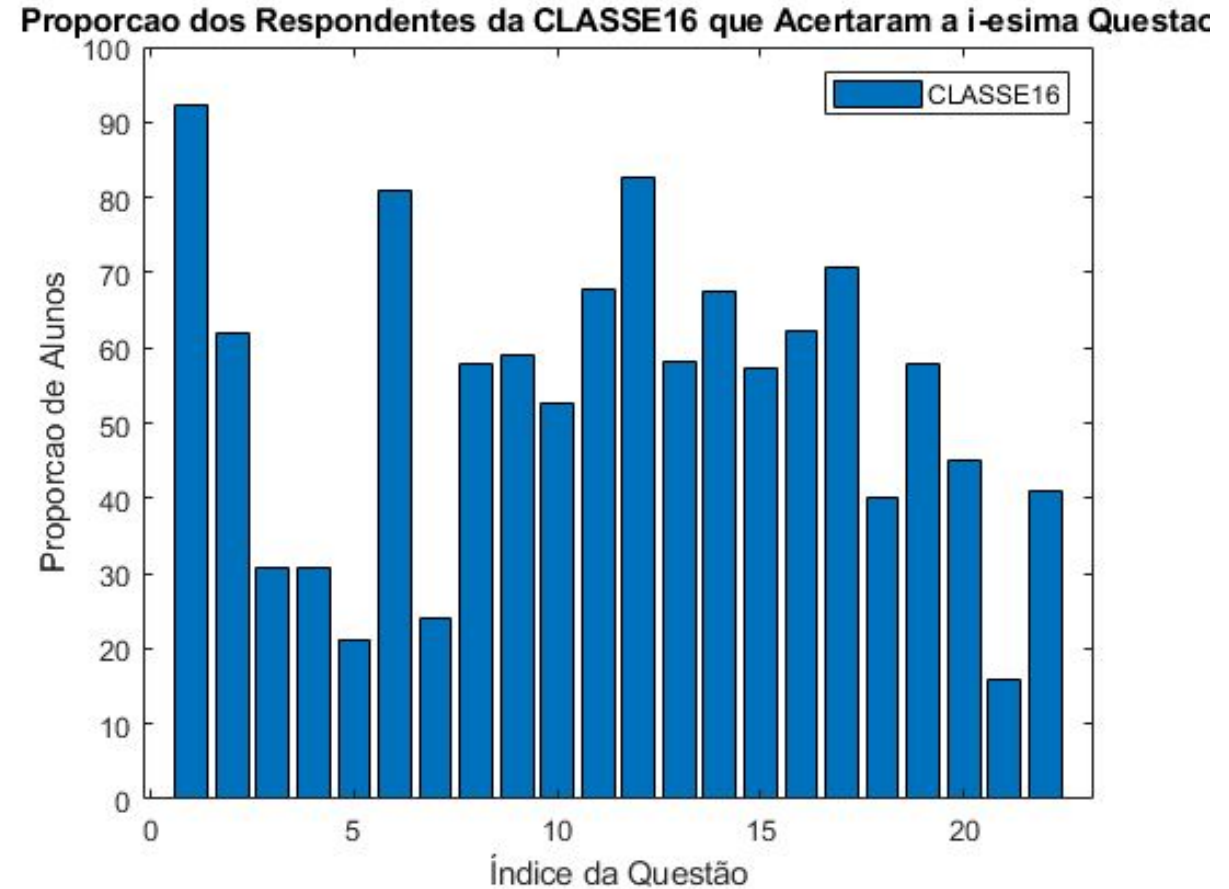
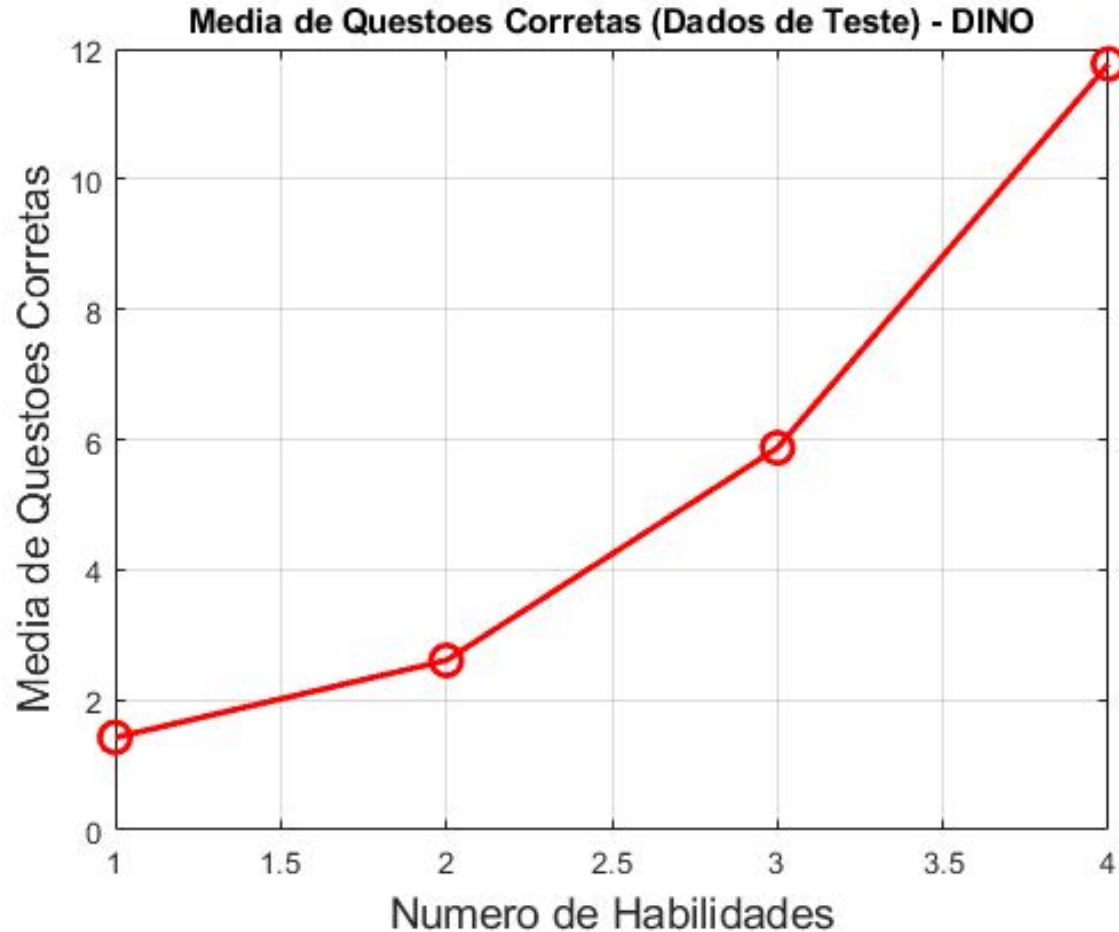
1	0	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
1	0	0	0
1	0	1	1
0	0	1	1
1	0	1	1
1	0	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1
1	1	1	1

- Matriz Q observada

$Q_{eq1} =$

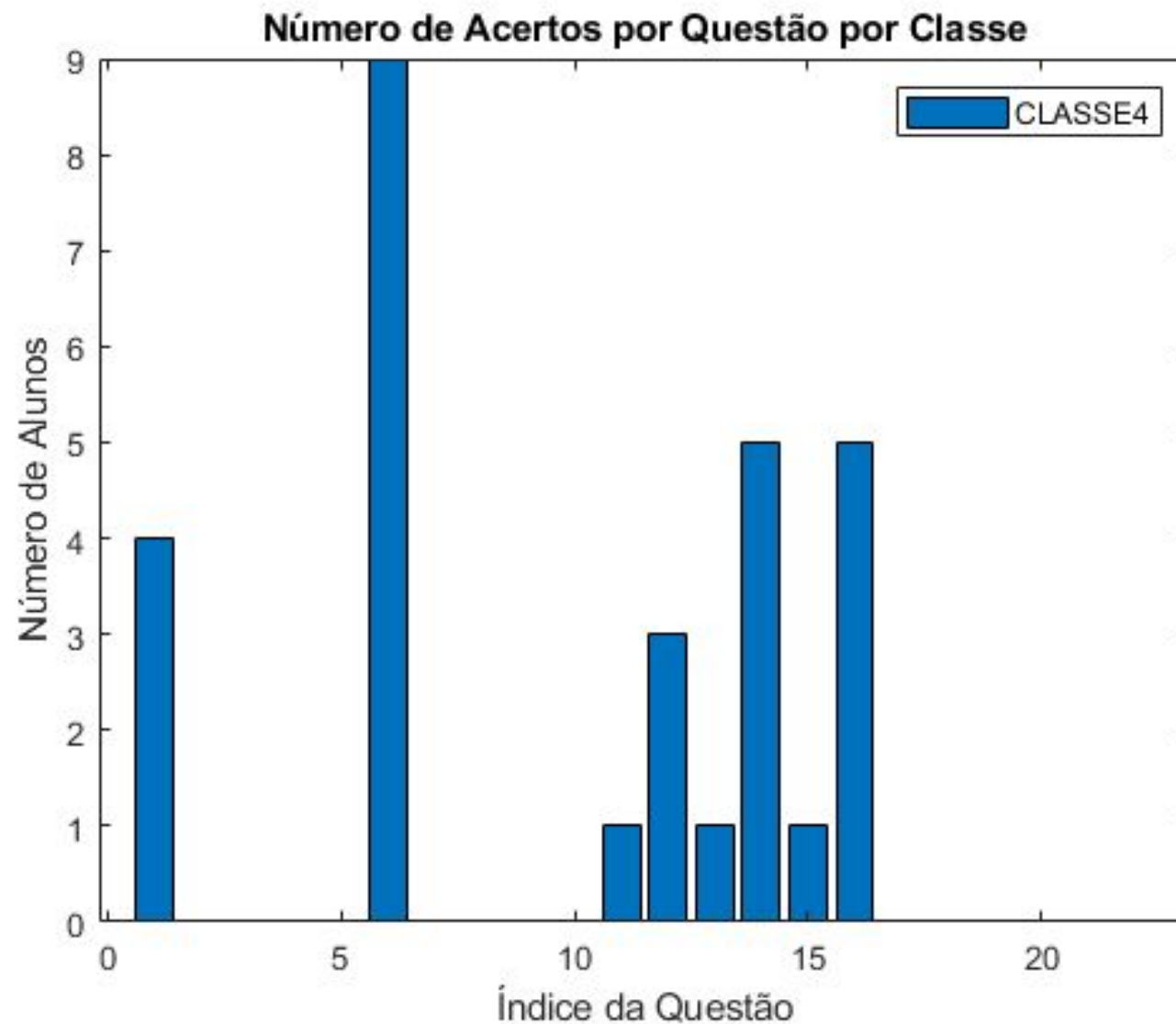
1	1	1	1
0	0	1	1
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	1	1	0
1	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	0
1	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
0	0	1	0
1	0	1	0

Atributos cognitivos e classes latentes



A classe 4 é a classe dos alunos que possuem as habilidades 1 e 2. O item 6 foi o de maior percentual de acertos entre os alunos desta classe. Pela matriz Q estimada, este item requer as habilidades 1, 2 e 4.

Os alunos da classe 4 não acertaram muitas questões, dentre as quais o Item 5. Pela matriz Q estimada, este item requer as habilidades 3 e 4, que os alunos desta classe não possuem, o que explicaria o insucesso dos alunos em responder este item.



Muito obrigado, em nome da equipe!

jorge.lira@mat.ufc.br



Centro de Excelência
em Políticas Educacionais